

Міністерство освіти і науки України  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



## **ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра метрології та інформаційно-вимірювальних технологій**

Н.В. Глухова, Ю.М. Харламова

### **МЕТРОЛОГІЯ ДИНАМІЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ. ЧАСТИНА II. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ**

для студентів напряму підготовки  
8(7).05100101 «Метрологія та вимірювальна техніка»

**Дніпропетровськ  
НГУ  
2015**

Глухова Н.В.

Метрологія динамічних вимірювань. Частина II. Моделювання та вимірювання параметрів динамічних процесів в електричних колах. Методичні вказівки до лабораторних робіт студентів напряму підготовки 8(7).05100101 «Метрологія та вимірювальна техніка» / Н.В. Глухова, Ю.М. Харламова ; Нац. гірн. ун-т. – Д : НГУ, 2015. – 56 с.

Автори:

Глухова Н.В. (робота № 1 та № 3);

Харламова Ю.М.(робота № 2 та № 4).

Затверджено до видання редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (наказ № XX від XX.XX.XXXX) за поданням методичної комісії напряму підготовки 8(7).05100101 «Метрологія та вимірювальна техніка» (протокол № 4 від 28.11.2014).

Методичні матеріали призначено для роботи студентів напряму 8(7).05100101 «Метрологія та вимірювальна техніка» під час підготовки та виконання лабораторних робіт з нормативної дисципліни «Метрологія динамічних вимірювань».

Розглянуто теоретичні відомості про динамічні властивості аналогових електромеханічних приладів, загальні відомості про перехідні процеси у лінійних електричних колах та перехідні процеси в колах з одним та двома реактивними елементами.

Наведено вказівки та приклади щодо розв'язання задач з дослідження перехідних процесів у електричних колах з одним та двома накопичувачами енергії класичним та операторним методом.

Методичні вказівки орієнтовано на закріплення теоретичних знань з лекційного матеріалу, а також розвиток навичок самостійної роботи студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри метрології та інформаційно-вимірювальних технологій, д-р техн. наук, проф.. В.І. Корсун.

## ВСТУП

Технології віртуальних приладів, які з'явилися порівняно нещодавно і викликали спочатку масу сумнівів з приводу ефективності їх застосування в освітній сфері, на сьогоднішній день активно використовуються та з успіхом застосовуються при вирішенні багатьох промислових завдань і створенні автоматизованих навчальних лабораторій.

Оптимальним рішенням для створення віртуальних лабораторних практикумів є графічна програмна технологія, реалізована в середовищі програмування LabVIEW. Інтуїтивно зрозумілий процес графічного програмування дозволяє приділяти більше уваги вирішенню проблем, пов'язаних з вимірюваннями і управлінням, а не програмуванню.

На рис. 1.0 наведена лицьова панель віртуальної лабораторної роботи для дослідження перехідних процесів в найпростішому електричному колі.

Основною метою даної роботи, є дослідження перехідних процесів в RL ланцюзі при його підключенні до джерела постійної та змінної напруги. Під час виконання лабораторного практикуму симулюється робота джерела живлення і генератора сигналів синусоїдальної форми. Користувач має можливість керувати частотою, амплітудою сигналу, задавати параметри RL ланцюга і за допомогою віртуального чотирьоканального осцилографа досліджувати перехідні процеси. Важливими перевагами застосування технологій LabVIEW є: можливість наочної імітації реального фізичного експерименту, а також можливість управління практично будь-яким реальним приладом.

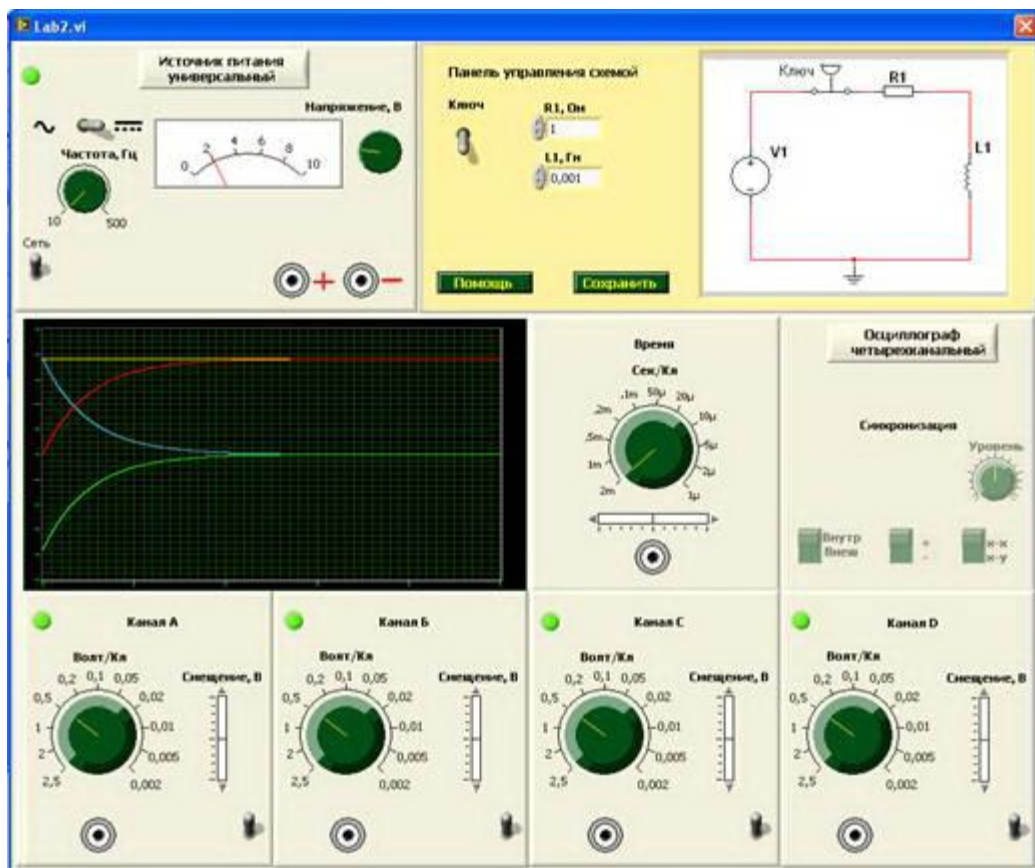


Рис.1.0. Лицьова панель лабораторного стенду

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1-LV

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ З ОДНИМ НАКОПИЧУВАЧЕМ ЕНЕРГІЇ

**Мета:** виконати аналітичний розрахунок перехідного процесу та розробити відповідний віртуальний лабораторний стенд для дослідження електричного кола.

#### Програма роботи

1. Виконати аналітичний розрахунок перехідного процесу в електричному колі з одним накопичувачем енергії класичним методом.
2. Побудувати графічну залежність зміни напруг та струмів у часі.
3. Розробити віртуальний лабораторний стенд для моделювання перехідного процесу в електричному колі.

#### Методичні вказівки

##### Загальні відомості про перехідні процеси в лінійних електричних колах

В електричних колах можливі включення і відключення окремих гілок, короткі замикання ділянок кола, різного роду перемикання. Будь-які зміни в електричних колах можна представити у вигляді перемикань або комутацій. Характер комутації вказується в схемі за допомогою рубильника зі стрілкою. У напрямку стрілки можна судити, замикається або розмикається рубильник.

При комутації в колі виникають *перехідні процеси*, тобто процеси переходу струмів і напруг від одного сталого значення до іншого.

Зміни струмів і напруг викликають одночасна зміна енергії електричного і магнітного полів, пов'язаних з елементами кола – ємностями і індуктивностями. Проте енергія електричного поля і енергія магнітного поля можуть змінюватися тільки безперервно, так як стрибкоподібна зміна вимагала б від джерела нескінченно великої потужності. На цьому міркуванні засновані закони комутації.

#### Закони комутації

**Перший закон.** У будь-якої гілки з індуктивністю струм не може змінюватися стрибком і в момент комутації зберігає те значення, яке він мав безпосередньо перед моментом комутації:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

де  $i_L(0_+)$  – струм в гілці з індуктивністю в момент комутації, відразу після комутації. Знак "+" у формулі зазвичай не записується. Час перехідного процесу відраховується від моменту комутації;  $i_L(0_-)$  – струм в індуктивності безпосередньо перед комутацією.

**Другий закон.** Напруга на ємності відразу після комутації зберігає те значення, яке воно мало безпосередньо перед моментом комутації:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-),$$

де  $u_C(0_+)$  – напруга на ємності в момент комутації;  $u_C(0_-)$  – напруга на ємності безпосередньо перед моментом комутації.

### Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Допущення, що застосовуються при аналізі перехідних процесів.

1. Вважають, що перехідний процес триває нескінченно великий час.
2. Вважають, що замикання і розмикання рубильника відбувається миттєво, без утворення електричної дуги.
3. Приймають, що до моменту комутації попередні перехідні процеси в колі закінчилися.

У відповідності з класичним методом розрахунку, перехідний струм в гілці схеми представляють у вигляді суми вимушеного і вільного струмів:

$$i(t) = i_{np}(t) + i_g(t),$$

де  $i_{np}(t)$  – примушений струм, визначається в сталому режимі після комутації. Цей струм створюється зовнішнім джерелом живлення. Якщо у коло увімкнено джерело постійної ЕРС, примушений струм буде постійним, якщо у колі діє джерело синусоїдальної ЕРС, примушений струм змінюється за періодичним, синусоїдальним законом;  $i_g(t)$  – вільний струм, визначається у схемі після комутації, з якої вилучено зовнішнє джерело живлення. Вільний струм створюється внутрішніми джерелами живлення: ЕРС самоіндукції індуктивності або напругою зарядженої ємності.

Вільний струм визначають за формулою:

$$i_g(t) = A_1 \cdot e^{P_1 t} + A_2 \cdot e^{P_2 t} + \dots,$$

де  $P_1, P_2$  – корені характеристичного рівняння;  $A_1, A_2$  – постійні інтегрування, визначаються за допомогою початкових умов.

Кількість доданків у формулі дорівнює числу реактивних елементів (індуктивностей і ємностей) в схемі.

*Початкові умови* – це перехідні струми і напруги в момент комутації, в момент часу  $t$ , рівний нулю.

Початкові умови можуть бути незалежними або залежними.

*Незалежними* називають початкові умови, що підпорядковуються законам комутації, законам поступової, безперервного зміни. Ця напруга на ємності  $u_C(0)$  і струм в гілці з індуктивністю  $i_L(0)$  у момент комутації.

Решта, початкові умови: напруга і струм в гілці з опором  $u_R(0)$  і  $i_R(0)$ , напруга на індуктивності  $u_L(0)$ , струм в гілці з ємністю  $i_C(0)$  – це *залежні* початкові умови. Вони не підпорядковуються законам комутації і можуть змінюватися стрибком.

## Перехідні процеси в колах з одним реактивним елементом

### Коротке замикання в R-L ланцюзі

На рис. 1.1 зображений електричне коло, в яке увімкнено джерело постійної ЕРС. В результаті комутації рубильник замикається і утворюється замкнений на себе R-L контур.

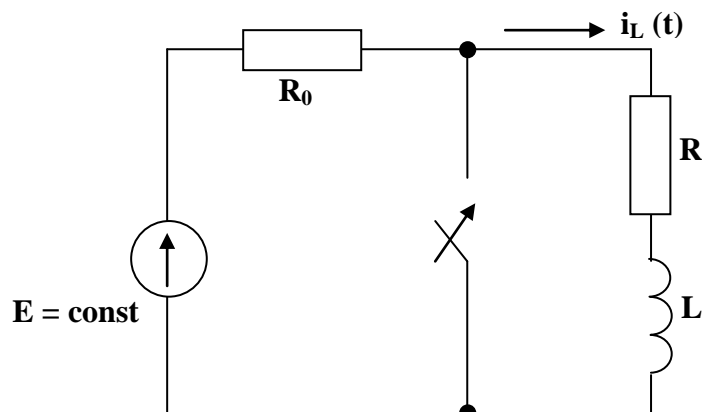


Рис. 1.1. Електричне коло з R-L контуром

До комутації рубильник був розімкнений і по індуктивності протікав струм:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_0 + R}.$$

Цей струм створював постійне магнітне поле в індуктивній котушці.

Визначимо закон зміни струму в індуктивності після комутації.

Згідно класичного методу повний струм у індуктивності визначається за формулою:

$$i_L(t) = i_{Lnp} + i_{Ls}(t) = i_{Lnp} + A \cdot e^{Pt}.$$

Примушений струм після комутації замикається через рубильник, що має нульовий опір, і через індуктивність не протікає. Індуктивний струм має тільки вільну складову:

$$i_{Lnp} = 0, i_L(t) = 0 + i_{L\epsilon}(t) = i_{L\epsilon}(t).$$

Магнітне поле, зникаючи, індукує в індуктивній котушці ЕРС самоіндукції. Вільний струм в R-L контурі існує за рахунок цієї електрорушійної сили.

Запишемо рівняння для вільного струму в R-L контурі, використовуючи другий закон Кірхгофа:

$$i_{L\epsilon}(t) \cdot R + L \cdot \frac{di_{L\epsilon}}{dt} = 0 \quad (1.1)$$

Шукаємо рішення цього рівняння у вигляді експоненти:

$$i_{L\epsilon}(t) = A \cdot e^{Pt}.$$

Похідна буде дорівнювати:

$$\frac{di_{L\epsilon}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}.$$

Підставимо значення вільного струму і похідної в рівняння (1.1):

$$A \cdot R \cdot e^{Pt} + L \cdot A \cdot P \cdot e^{Pt} = A \cdot e^{Pt} (R + P \cdot L) = R + L \cdot P = 0 \quad (1.2)$$

Рівняння (1.2), отримане з рівняння (1.1), називається характеристичним.

З рівняння (1.2) виразимо  $P = -R/L$  – корінь характеристичного рівняння.

$\tau = \left| \frac{1}{P} \right| = \frac{L}{R}$  – постійна часу перехідного процесу, вимірюється в секундах.

*Постійна часу*  $\tau$  – це інтервал часу, за який перехідний струм зменшується в  $e$  раз.

Вільна складова струму:

$$i_{L\epsilon} = A \cdot e^{-R/Lt} = A \cdot e^{-t/\tau}.$$

Для визначення постійної інтегрування  $A$  скористаємося початковими умовами ( $t=0$ ), використовуючи перший закон комутації. Підставивши значення  $i_L(0_-)$  у рівняння для повного струму у індуктивності, отримаємо:

$$i_L(0) = i_{Lnp} + i_{L\epsilon}(0) = 0 + A \cdot e^{0t} = A,$$

$$i_L(0) = i_L(0_-),$$

$$A = i_L(0_-) = \frac{E}{R_0 + R}.$$

Підставивши постійну інтегрування  $A$ , запишемо вільну складову струму у індуктивності, яка співпадає з повним струмом:  $i_L(t) = i_{L\epsilon}(t) = \frac{E}{R_0 + R} \cdot e^{-R/Lt}$ , де враховано, що  $i_{Lnp} = 0$ .

Напругу на індуктивності знайдемо взявши похідну від  $i_L(t)$ :

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \left( \frac{-R}{L} \right) \cdot \frac{E \cdot e^{-R/Lt}}{R_0 + R} = -\frac{R}{R_0 + R} \cdot E \cdot e^{-R/Lt}$$

На рис. 1.2 зображені криві перехідного струму в гілці з індуктивністю і перехідною напругою на індуктивності. Перехідний струм і напруга по експоненті прагнуть до нуля. В інженерних розрахунках вважають, що через інтервал часу, рівний  $(4 \dots 5) \tau$ , перехідний процес закінчується.

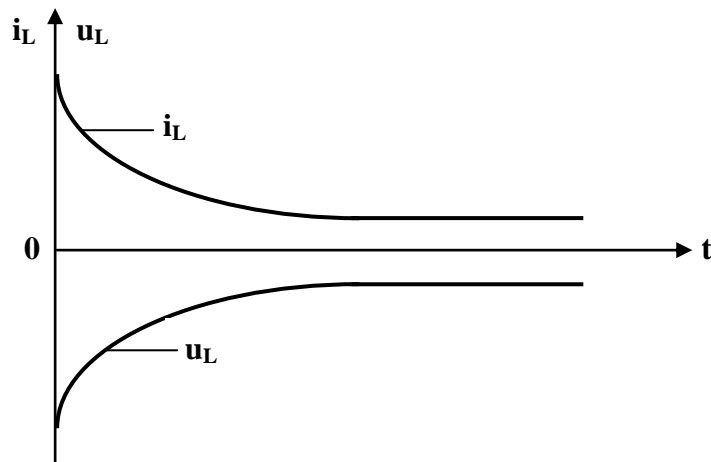


Рис. 1.2. Криві перехідного струму та напруги

### ***Підключення R-L ланцюга до джерела постійної ЕРС***

У схемі на рис. 1.3 до комутації рубильник розімкнутий. В результаті комутації рубильник замикається і підключає R-L ланцюг до джерела постійної ЕРС. Визначимо закон зміни струму  $i(t)$ :

$$i(t) = i_{np} + i_{\epsilon}(t) = i_{np} + A \cdot e^{Pt}.$$



Оскільки опір індуктивного елементу  $L$  постійному струму дорівнює нуль, то примусова складова струму в сталому режимі після комутації дорівнюватиме:

$$i_{np} = \frac{E}{R}.$$

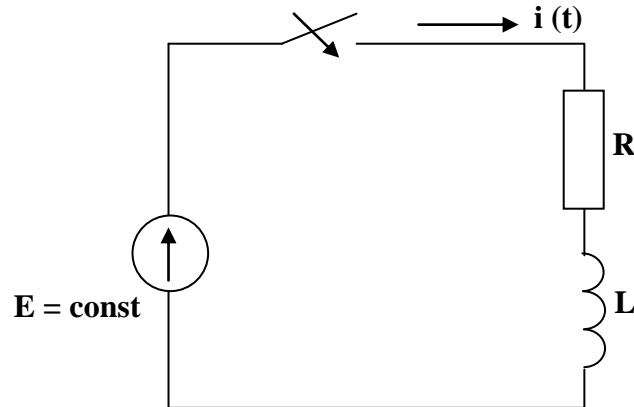


Рис. 1.3. R-L ланцюг з джерелом постійної ЕРС

Враховуючи що у вільному режимі зі схеми вилучено зовнішнє джерело живлення, запишемо рівняння для вільного струму, використовуючи другий закон Кірхгофа:

$$i_{L\epsilon}(t) \cdot R + L \cdot \frac{di_{L\epsilon}}{dt} = 0$$

Оскільки вищенаведене рівняння для вільного струму нічим не відрізняється від рівняння (1.1), вільний струм визначається за формулою:

$$i_{\epsilon}(t) = A \cdot e^{-R/Lt}.$$

Запишемо значення перехідного струму для моменту комутації, ( $t = 0$ ):

$$i(0) = i_{np} + i_{\epsilon}(0) = i_{np} + A(0), \text{ звідки } A = i(0) - i_{np}.$$

До комутації рубильник був розімкнений, і струм у схемі відсутній. Відразу після комутації струм у індуктивності залишається рівним нулю:

$$i(0) = i(0_-) = 0,$$

підставивши знайдені значення струмів  $i(0_-)$  та  $i_{np}$  у рівняння для повного струму у індуктивності, отримаємо постійну інтегрування:

$$A = 0 - i_{np} = -i_{np} = -\frac{E}{R},$$

тоді повний струм у індуктивності:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-R/Lt} = \frac{E}{R} (1 - e^{-R/Lt}).$$

Напругу на індуктивності знайдемо взявши похідну від  $i(t)$ :

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-R/Lt} = E \cdot e^{-R/Lt}.$$

На рис. 1.4 зображені криві перехідного, вимушеного, вільного струмів і перехідної напруги на індуктивності.

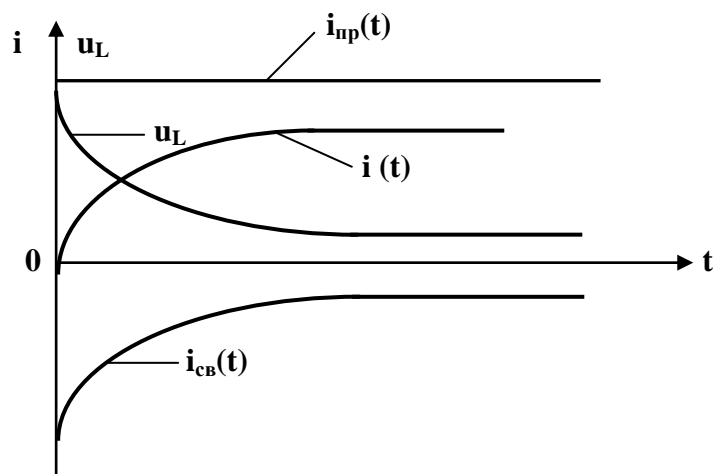


Рис. 1.4. Криві струмів та напруг на індуктивності

Вільний струм і напруга на індуктивності плавно зменшуються до нуля. У момент комутації вільний і примушений струми однакові за абсолютною величиною.

Перехідний струм починається при включенні з нуля, потім зростає, наближаючись до сталого постійного значення.

### ***Коротке замикання в R-C ланцюзі***

У схемі на рис. 1.5 в результаті комутації рубильник замикається, і утворюється замкнений на себе R-C контур.

До комутації ємність повністю зарядилась до напруги, рівній ЕРС джерела живлення, тобто  $u_C(0_-) = E$ . Після комутації ємність повністю розряджається, отже, примушений струм в R-C ланцюзі і вимушена напруга на конденсаторі дорівнюють нулю.

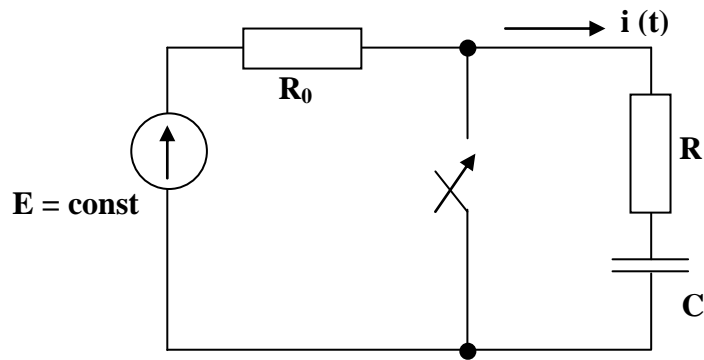


Рис. 1.5. Електричне коло з R-C контуром

У колі існує тільки вільний струм за рахунок напруги зарядженого конденсатора. Запишемо для R-C контуру рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$u_{C_0} + R \cdot i_0 = 0.$$

Враховуючи що струм через конденсатор  $i_0 = C \cdot \frac{du_{C_0}}{dt}$ , отримаємо диференціальне рівняння:

$$u_{C_0} + R \cdot C \cdot \frac{du_{C_0}}{dt} = 0 \quad (1.3)$$

Рішення цього рівняння має вигляд:  $u_{C_0} = A \cdot e^{Pt}$ .

Підставимо значення вільної напруги і похідної від напруги:  $\frac{du_{C_0}}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}$  у рівняння (1.3):

$$A \cdot e^{Pt} + R \cdot C \cdot P \cdot A \cdot e^{Pt} = A \cdot e^{Pt} (1 + R \cdot C \cdot P) = 0 \Rightarrow 1 + R \cdot C \cdot P = 0.$$

Рівняння  $1 + R \cdot C \cdot P = 0$  називається характеристичним.

$P = -\frac{1}{R \cdot C}$  – корінь характеристичного рівняння;

$\tau = -\frac{1}{P} = R \cdot C$  – постійна часу перехідного процесу.

Вільна напруга на конденсаторі:

$$u_{C_0} = A \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Знайдемо постійну інтегрування  $A$ , враховуючи що:

$$u_c(0) = u_{c_0}(0) = A = u_c(0_-) = E,$$

тоді отримаємо:

$$A = E \quad u_c = E \cdot e^{-t/RC}$$

Струм у ємності визначається за формулою:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_c}{dt} = C \cdot \left(-\frac{1}{R \cdot C}\right) \cdot E \cdot e^{-t/RC} = -\frac{E}{R} \cdot e^{-t/RC}.$$

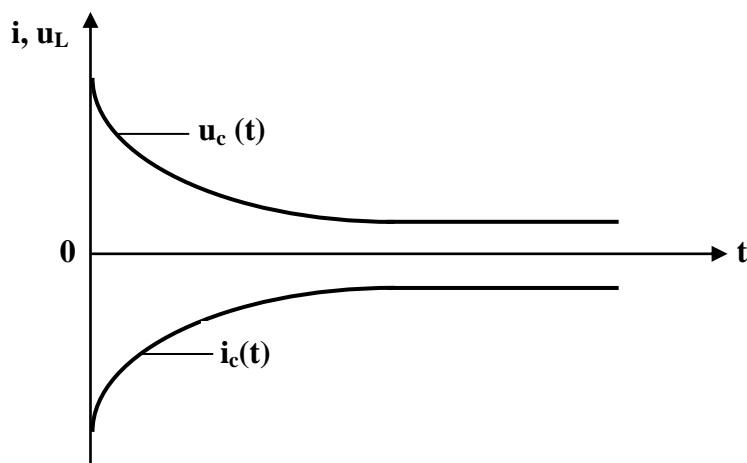


Рис. 1.6. Криві струму та напруги на конденсаторі

Перехідний струм і перехідна напруга на конденсаторі по експоненційному закону зменшуються до нуля (рис. 1.6).

### **Підключення R-C ланцюга до джерела постійної ЕРС**

Вважаємо, що до комутації конденсатор не заряджений, напруга на ньому:

$$u_c(0_-) = 0.$$

В результаті комутації рубильник замикається, і конденсатор повністю заряджається (рис. 1.7).

Вимушена напруга на ємності дорівнює ЕРС джерела живлення  $u_{Cnp} = E$ .

Перехідна напруга згідно класичного методу :

$$u_c(t) = u_{Cnp} + u_0 = u_{Cnp} + A \cdot e^{-t/RC}.$$

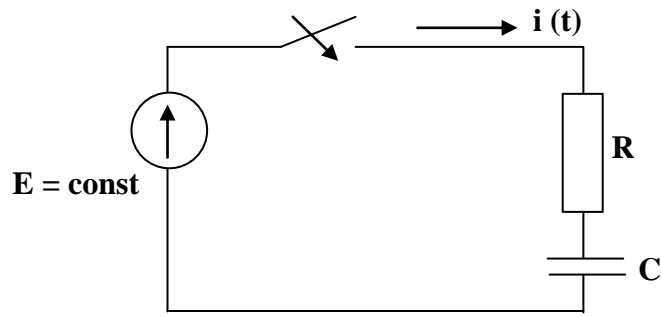


Рис. 1.7. Підключення R-C ланцюга до джерела постійної ЕРС

В момент комутації ( $t=0$ ) напруга на конденсаторі дорівнюватиме:

$$u_C(0) = u_{Cnp} + A, \text{ звідки постійна інтегрування: } A = u_C - u_{Cnp}.$$

Згідно з другим законом комутації:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0. \quad A = 0 - u_{Cnp} = -u_{Cnp} = -E.$$

Підставивши знайдені значення вимушеної напруги на ємності та постійної інтегрування, отримаємо перехідну напругу:

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-t/RC} = E(1 - e^{-t/RC}).$$

Перехідний струм у ємності визначається за формулою:

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot E \cdot e^{-t/RC} = -\frac{E}{R} \cdot e^{-t/RC}.$$

Криві напруг і струму зображені на рис. 1.8

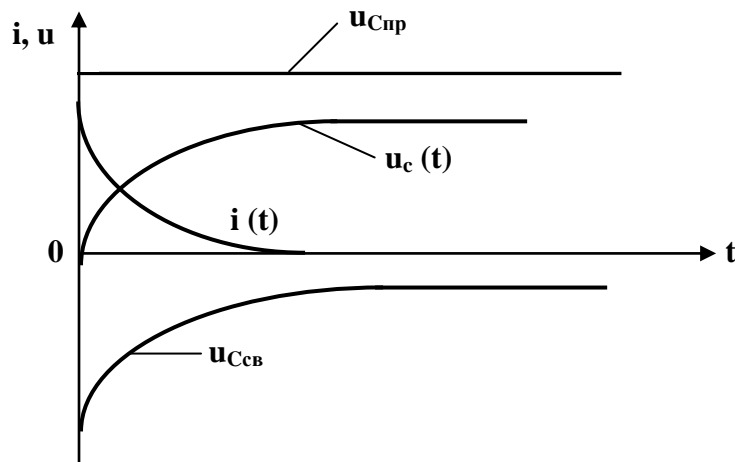


Рис. 1.8. Криві струму та напруг на конденсаторі

## Завдання

Для обраного кола розрахувати перехідний процес класичним методом. Побудувати графіки зміни напруг та струмів у часі. Розробити віртуальний лабораторний стенд для моделювання перехідного процесу заданого кола.

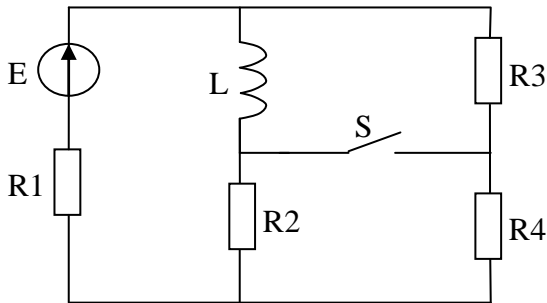
Для усіх варіантів передбачити використання у якості джерела живлення ЕРС постійного струму з діапазоном регульованої напруги 0-50 В. При виконанні аналітичних розрахунків прийняти  $E=10$  В.

### Варіанти індивідуальних завдань

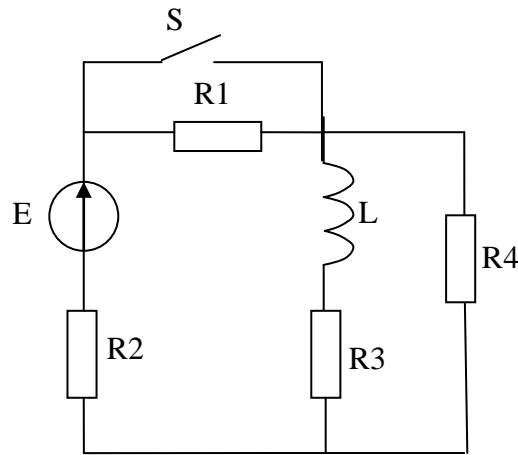
(Варіант індивідуального завдання обирається згідно порядкового номеру студента у журналі викладача. Якщо порядковий номер студента більше 20, то відлік ведеться з початку. Так для студента з порядковим номером 21 обирається варіант №1, 22 – варіант №2, 23 – варіант №3 і т.д.)

#### Завдання 1. Контур з індуктивністю

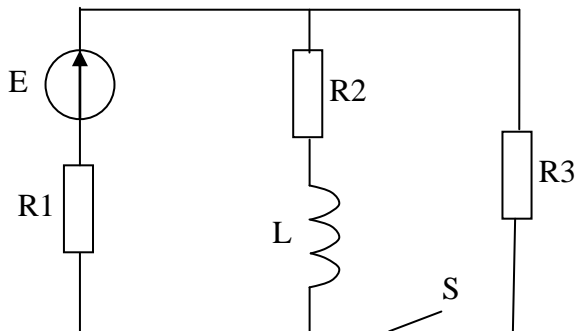
1.  $L=0,7$ Гн;  $R_1=400$ Ом;  
 $R_2=100$  Ом;  $R_3=R_4=1000$ Ом.



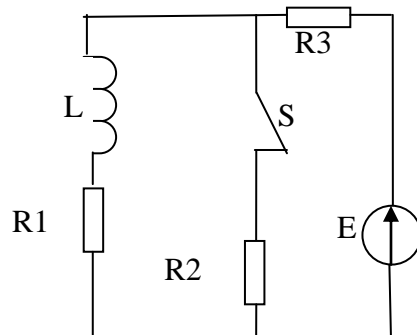
2.  $L=0,8$ Гн;  $R_1=500$ Ом;  
 $R_2=R_3=R_4=1000$ Ом.



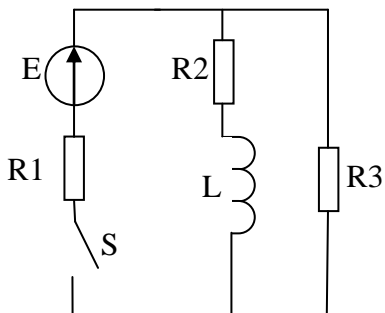
3.  $L=0,3$ Гн;  $R_1=45$  Ом;  
 $R_2=50$  Ом;  $R_3=30$  Ом.



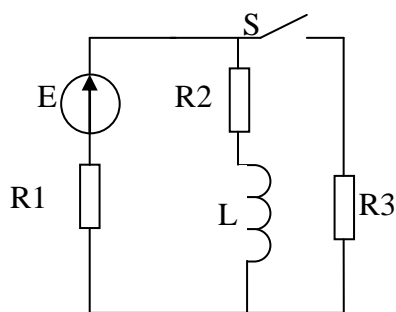
4.  $L=0,5$ Гн;  $R_1=R_2=R_3=50$  Ом.



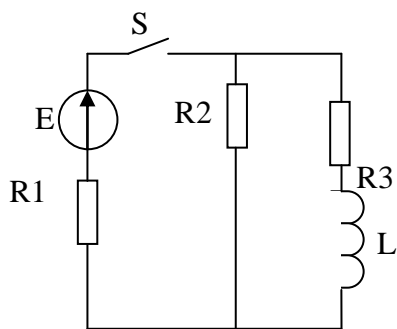
5.  $L=20 \text{ мГн}$ ;  $R_3=300 \text{ Ом}$ ;  $R_1=R_2=150 \text{ Ом}$ .



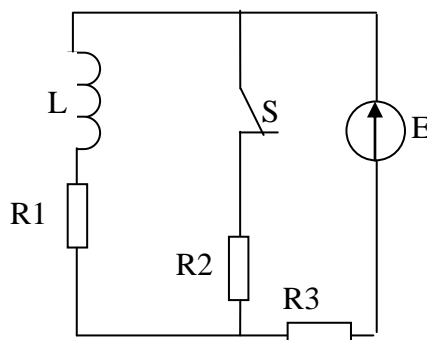
6.  $L=20 \text{ мГн}$ ;  $R_2=200 \text{ Ом}$ ;  $R_1=R_3=15 \text{ Ом}$ .



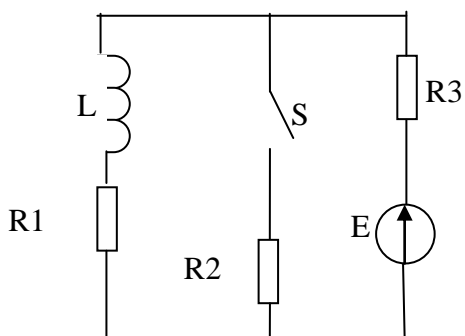
7.  $L=50 \text{ мГн}$ ;  $R_2=100 \text{ Ом}$ ;  $R_1=R_3=50 \text{ Ом}$ .



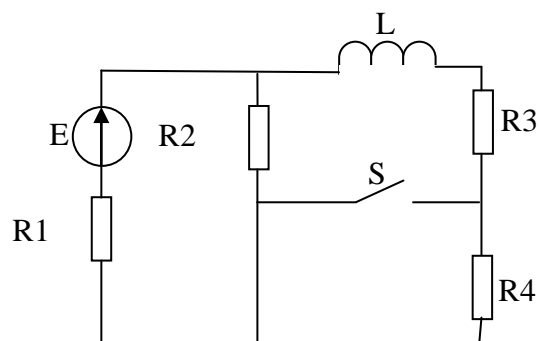
8.  $L=0,7 \text{ Гн}$ ;  $R_1=100 \text{ Ом}$ ;  $R_2=50 \text{ Ом}$ ;  $R_3=75 \text{ Ом}$ .



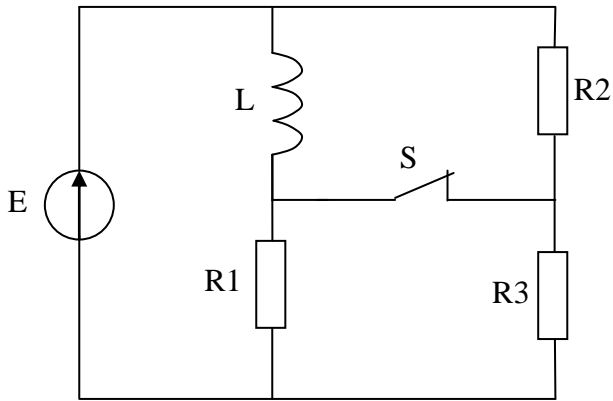
9.  $L=0,8 \text{ Гн}$ ;  $R_1=100 \text{ Ом}$ ;  $R_2=50 \text{ Ом}$ ;  $R_3=100 \text{ Ом}$ .



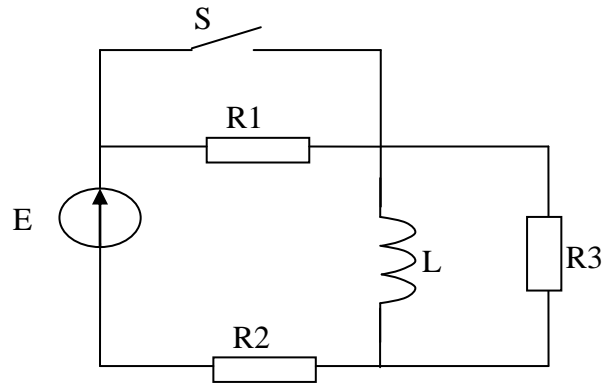
10.  $L=0,2 \text{ Гн}$ ;  $R_1=20 \text{ Ом}$ ;  $R_2=200 \text{ Ом}$ ;  $R_3=R_4=100 \text{ Ом}$ .



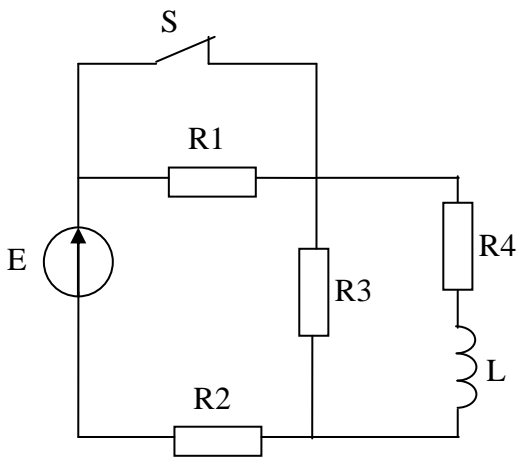
11.  $L=0,1\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=2000\text{O}\text{M}$ ;  $R_2=100\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_3=1000\text{O}\text{M}$ .



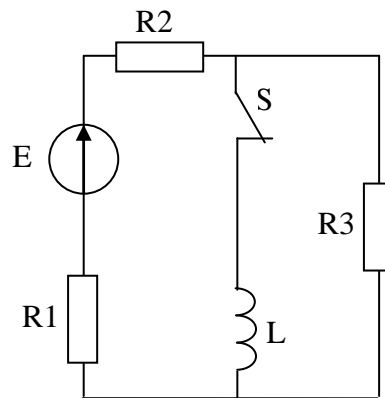
12.  $L=0,7\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=5000\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_2=100\text{O}\text{M}$ ;  $R_3=2000\text{O}\text{M}$ .



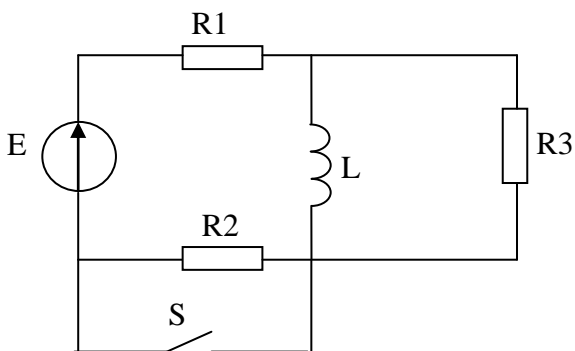
13.  $L=0,3\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=500\text{O}\text{M}$ ;  $R_2=100\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_3=R_4=1000\text{O}\text{M}$ .



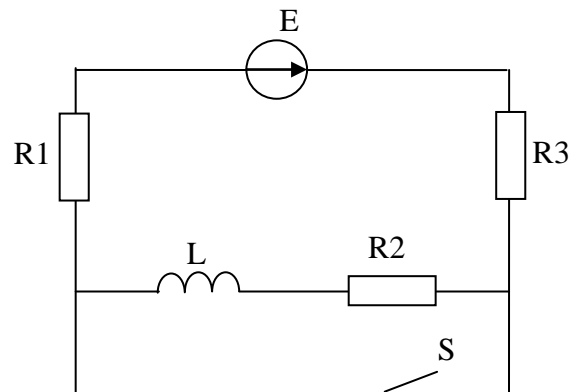
14.  $L=0,8\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=3000\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_2=250\text{O}\text{M}$ ;  $R_3=2000\text{O}\text{M}$ .



15.  $L=0,6\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=R_2=2000\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_3=3000\text{O}\text{M}$ .

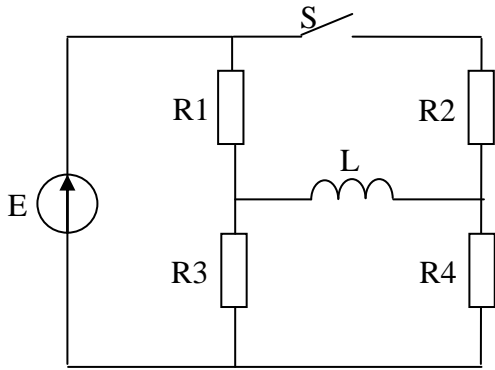


16.  $L=50\text{m}\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=500\text{O}\text{M}$ ;  $R_2=250\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_3=300\text{O}\text{M}$ .

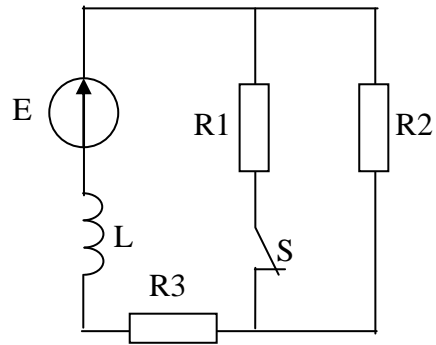




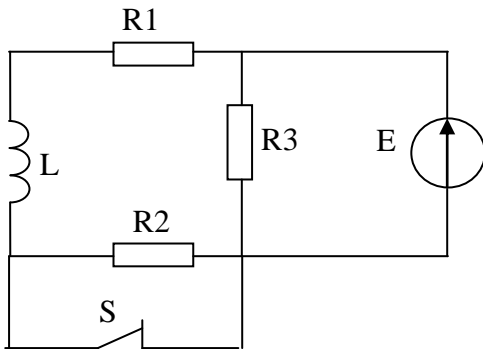
17.  $L=0,4\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=100\text{O}\text{M}$ ;  $R_2=200$   
 $R_3=150\text{O}\text{M}$ ;  $R_4=250$ .



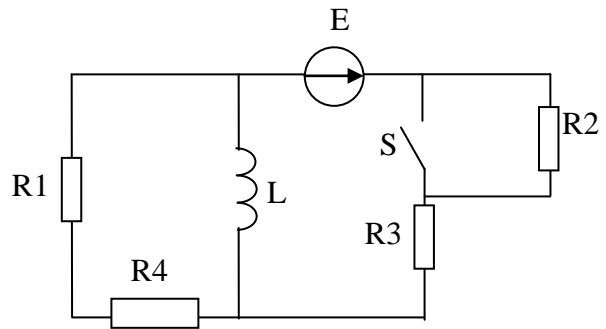
18.  $L=0,1\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=75\text{O}\text{M}$ ;  $R_2=25\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_3=50\text{O}\text{M}$ .



19.  $L=25\text{M}\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=R_2=15\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_3=35\text{O}\text{M}$ .



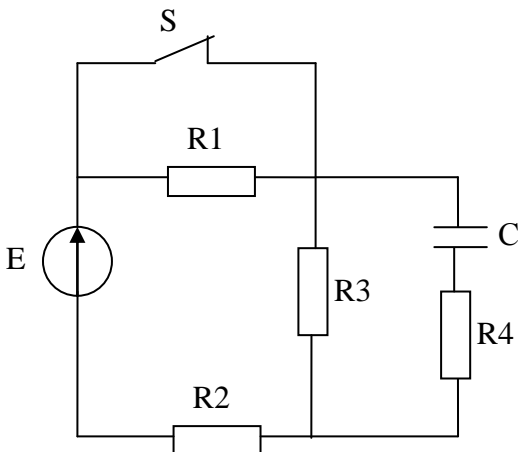
20.  $L=60\text{M}\Gamma\text{H}$ ;  $R_1=10\text{O}\text{M}$ ;  $R_2=20\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_3=15\text{O}\text{M}$ ;  $R_4=25\text{O}\text{M}$ .



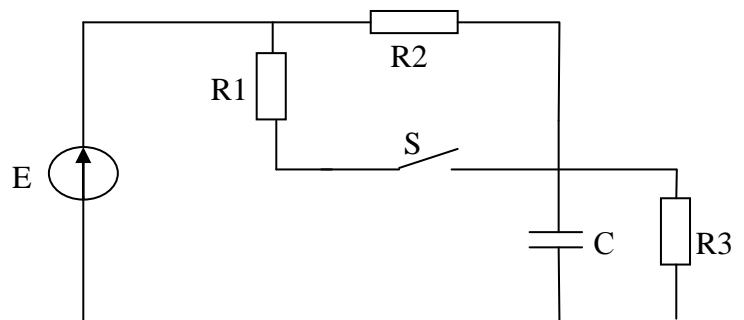
### Завдання 2. Контур з ємністю

**Для усіх варіантів  $U_C(0)=0\text{ В}$ .**

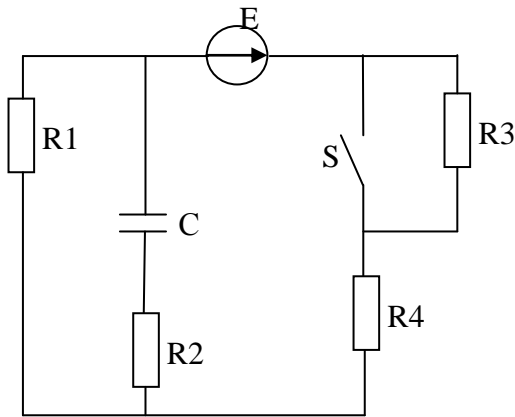
1.  $C=200\text{ мкФ}$ ;  $R_1=35\text{O}\text{M}$ ;  
 $R_2=50\text{ O}\text{M}$ ;  $R_3=100\text{O}\text{M}$ ,  $R_4=30\text{ O}\text{M}$ .



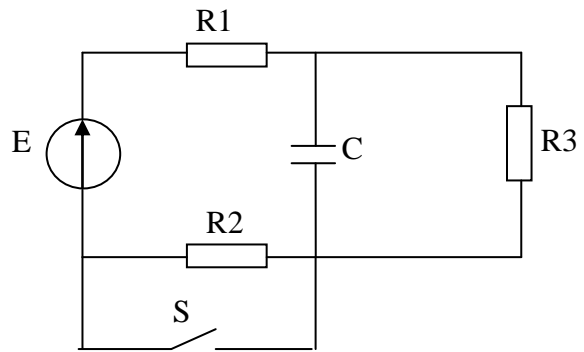
2.  $C=20\text{ мкФ}$ ;  $R_1=10\text{O}\text{M}$ ;  $R_2=50\text{ O}\text{M}$ ;  
 $R_3=30\text{O}\text{M}$ .



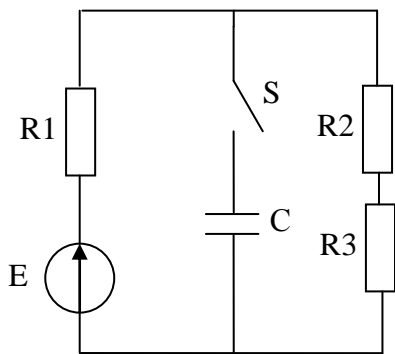
3.  $C=30 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=150 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=20 \text{ Ом}$ ;  $R_3=100 \text{ Ом}$ ;  $R_4=20 \text{ Ом}$ .



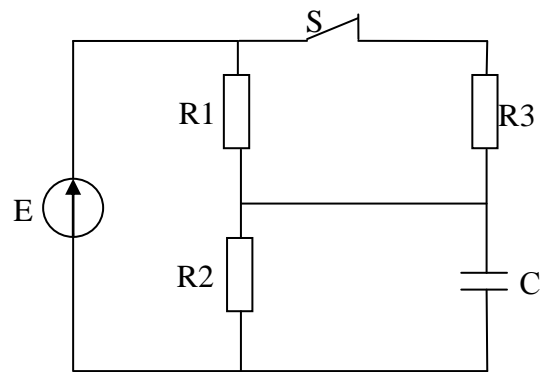
4.  $C=30 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=100 \text{ Ом}$ ;  $R_2=20 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=50 \text{ Ом}$ .



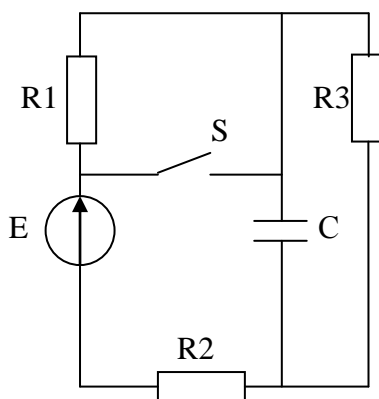
5.  $C=100 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=60 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=60 \text{ Ом}$ ;  $R_3=20 \text{ Ом}$ .



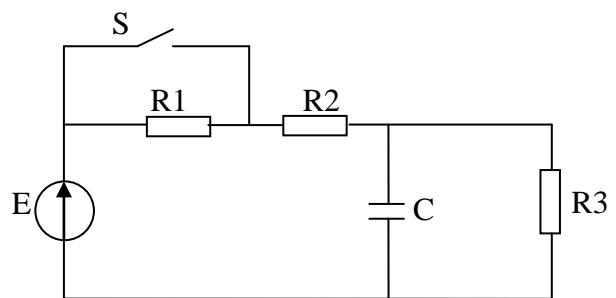
6.  $C=30 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=30 \text{ Ом}$ ;  $R_2=20 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=60 \text{ Ом}$ .



7.  $C=40 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=200 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=R_3=120 \text{ Ом}$ .

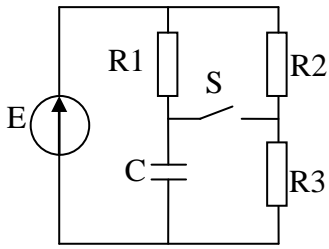


8.  $C=20 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=500 \text{ Ом}$ ;  $R_2=R_3=100 \text{ Ом}$ .

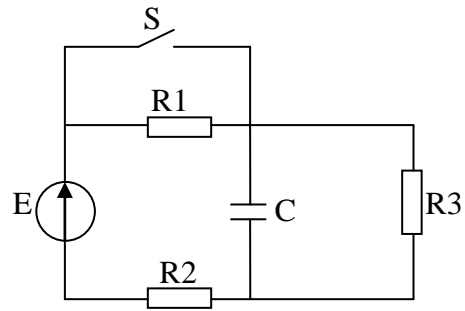


9.  $C=10 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=10 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=R_3=50 \text{ Ом}$ .

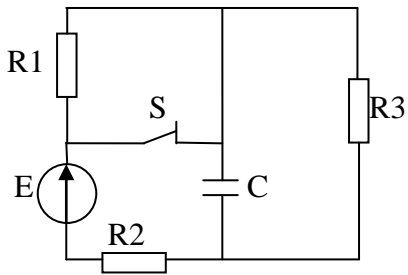
10.  $C=20 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=500 \text{ Ом}$ ;  $R_2=100 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=100 \text{ Ом}$ .



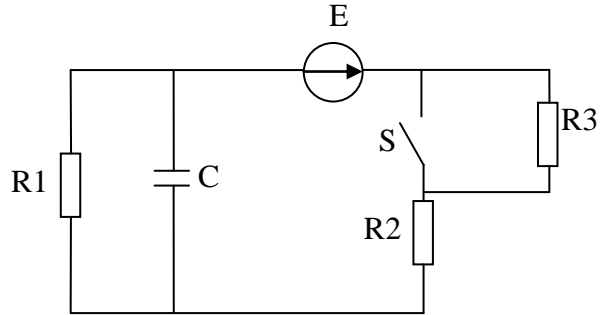
11.  $C=200 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=300 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=100 \text{ Ом}$ ;  $R_3=100 \text{ Ом}$ .



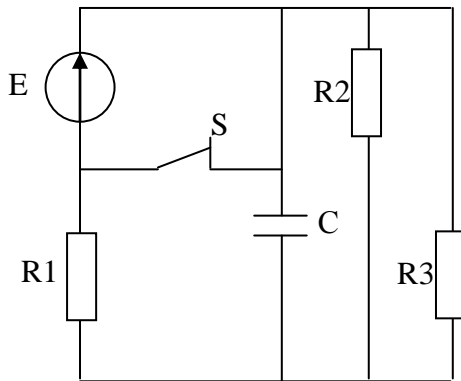
12.  $C=50 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=20 \text{ Ом}$ ;  $R_2=10 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=10 \text{ Ом}$ .



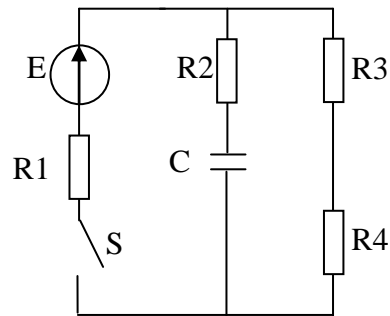
13.  $C=150 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=250 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=200 \text{ Ом}$ ;  $R_3=150 \text{ Ом}$ .



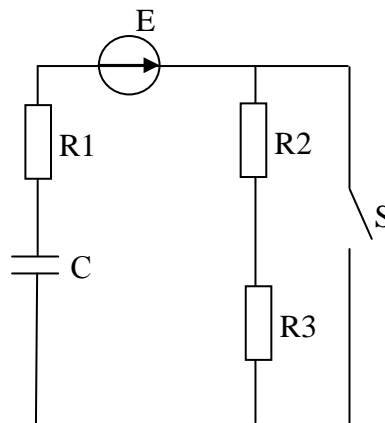
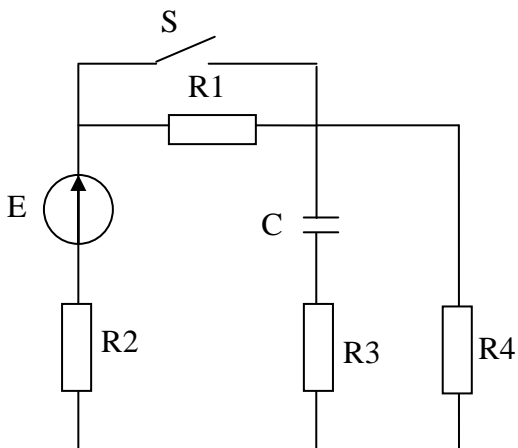
14.  $C=100 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=R_2=150 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=100 \text{ Ом}$ ;  $R_4=50 \text{ Ом}$ .



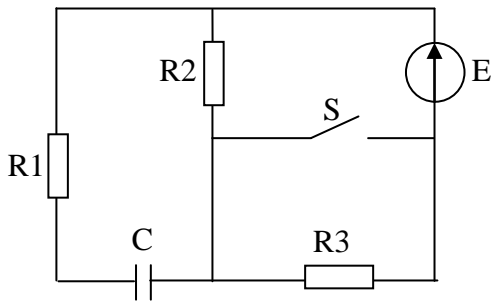
15.  $C=250 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=500 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=400 \text{ Ом}$ ;  $R_3=R_4=300 \text{ Ом}$ .



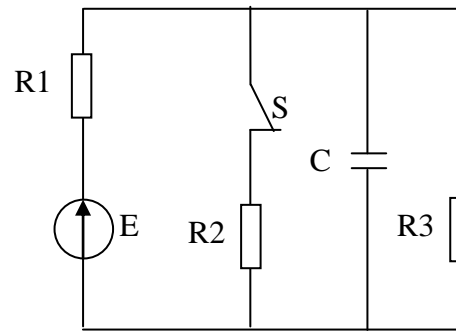
16.  $C=10 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=20 \text{ Ом}$ ;  $R_2=15 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=10 \text{ Ом}$ .



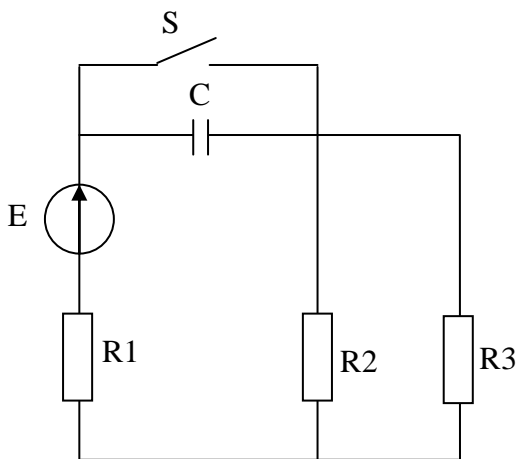
17.  $C=25 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=20 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=50 \text{ Ом}$ ;  $R_3= 10 \text{ Ом}$ .



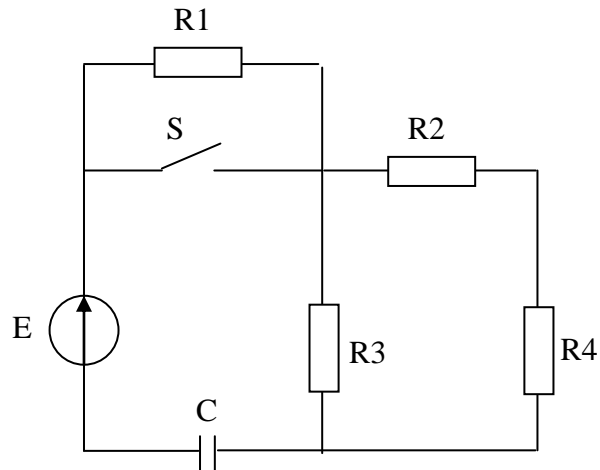
18.  $C=150 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=150 \text{ Ом}$ ;  $R_2=100 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=200 \text{ Ом}$ .



19.  $C=200 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=450 \text{ Ом}$ ;  
 $R_2=350 \text{ Ом}$ ;  $R_3=300 \text{ Ом}$ .



20.  $C=100 \text{ мкФ}$ ;  $R_1=200 \text{ Ом}$ ;  $R_2=150 \text{ Ом}$ ;  
 $R_3=200 \text{ Ом}$ ;  $R_4=250 \text{ Ом}$ .



### Звіт повинен містити

1. Вихідні дані у вигляді схем та числових значень параметрів для кіл з індуктивністю та ємністю відповідно.
2. Детальний опис аналітичного розрахунку перехідних процесів у заданих колах, що включає формули у загальному виді та з підстановкою числових даних.
3. Побудовані у масштабі графіки зміни напруг та струмів у часі.
4. Роздруківку зовнішнього вигляду лицьової панелі та розробленої блок-діаграми (з усіма піддіаграмами) віртуального приладу LabView.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2-LV

### МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ АНАЛОГОВОГО ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПРИЛАДУ

**Мета:** вивчення теоретичних відомостей про динамічні властивості аналогових електромеханічних приладів, побудова віртуального лабораторного стенду для моделювання динамічного режиму роботи таких приладів.

#### Програма роботи

1. Вивчити теоретичні відомості стосовно динамічних властивостей аналогових електромеханічних приладів.
2. Скласти диференційне рівняння, що описує динаміку електромеханічного приладу.
3. Розробити віртуальний лабораторний стенд у середовищі LabView для моделювання динамічного режиму роботи аналогового електромеханічного приладу.

#### Методичні вказівки

Аналогові електромеханічні прилади призначені для вимірювання електричних величин, при цьому вимірювальний механізм перетворює електричну енергію, отриману від допоміжної величини, в механічну енергію переміщення рухомої частини приладу.

Узагальнена структурна схема аналогового електромеханічного приладу наведена на рис. 2.1.

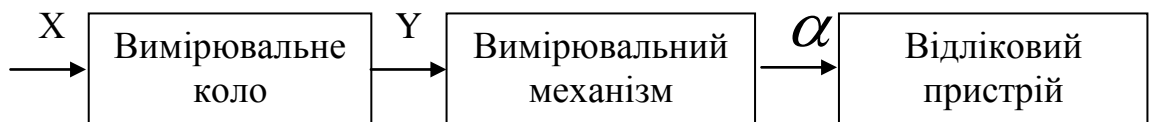


Рис. 2.1. Структурна схема електромеханічного приладу

*Вимірювальне коло* перетворює електричну величину  $X$  у допоміжну величину  $Y$ , функціонально пов'язану з  $X$ . При цьому величина  $Y$  може бути безпосередньо оброблена вимірювальним механізмом.

*Вимірювальний механізм* – основна складова електромеханічного приладу. Він призначений для операцій перетворення електромагнітної енергії в механічну, що необхідна для створення кута відхилення  $\alpha$ .

Між кутом відхилення та фізичною вимірюваною величиною існує однозначна функціональна залежність:

$$\alpha = f(Y) = F(X) \quad (2.1)$$

Аналогові електромеханічні прилади, як правило, відносяться до приладів безпосередньої оцінки, тобто за кутом повороту  $\alpha$  і визначається вимірювана величина.

Кількісна оцінка вимірюваної величини здійснюється за допомогою відлікового пристрою, який складається зі стрілки, пов'язаної з вимірювальним механізмом, та шкали.

Ціна поділки шкали визначається як:

$$c = \frac{X_H}{N}, \quad (2.2)$$

де  $X_H$  – кінцеве значення шкали на даній межі вимірювань;  $N$  – кількість поділок шкали.

При русі стрілки вимірювального механізму електромеханічного приладу вимірювальний сигнал передає рухомій частині приладу певну кількість енергії. При цьому на рухому частину діє декілька моментів. Диференціальне рівняння моментів, що описує роботу вимірювального механізму, матиме вигляд:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \sum M, \quad (2.3)$$

де  $J$  – момент інерції рухомої частини вимірювального механізму;  $\alpha$  – кут відхилення рухомої частини (стрілки);  $\frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  – кутове прискорення.

При русі стрілки на рухому частину вимірювального механізму впливають такі моменти (права частина рівняння (2.3)):

1. *Обертальний момент*, який залежить від вимірюваної величини  $M_{об} = f_1(X)$  та визначається змінням енергії електромагнітного поля.
2. *Протидійний момент*, який створюється за допомогою спеціальних пружин та розтяжок. Протидійний момент пропорційний куту закручування або куту відхилення рухомої частини вимірювального механізму.
3. *Момент заспокоєння*, який може створюватися заспокоювачами різної конструкції, наприклад, повітряними, магнітоіндукційними, рідинними. Заспокоювач швидко гасить коливання рухомої частини у процесі вимірювань.

Залежно від способу створення обертального моменту електромеханічні вимірювальні прилади можна поділити на такі групи: магнітоелектричні, електромагнітні, електродинамічні, феродинамічні, електростатичні та ін.

У приладах магнітоелектричного типу переміщення рухомої частини вимірювального механізму здійснюється за рахунок взаємодії поля постійного магніту та електричного струму, який проходить через котушку. Перевагою таких приладів є рівномірна шкала, оскільки обертальний момент змінюється пропорційно вимірюваній фізичній величині:

$$M_{BP} = I \frac{d\psi}{dt}, \quad (2.4)$$

де  $I$  – електричний струм, що вимірюється;  $\psi$  – потокозчеплення.

У вимірювальних приладах електромагнітної системи обертальний момент створюється за рахунок взаємодії магнітного поля котушки зі струмом та рухомого феромагнітного пелюстка. При цьому обертальний момент можна визначити таким чином:

$$M_{BP} = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{d\alpha}, \quad (2.5)$$

де  $\frac{dL}{d\alpha}$  – похідна індуктивності котушки за кутом переміщення осердя.

Електродинамічні вимірювальні прилади працюють за принципом взаємодії магнітних потоків двох котушок – рухомої та нерухомої. Електричні струми, що протікають у котушках, та відповідні до них магнітні потоки при взаємодії створюють обертальний момент вигляду:

$$M_{BP} = I_{\delta} I_H \frac{dM_{\delta.i.}}{d\alpha}, \quad (2.6)$$

де  $I_{\delta}, I_H$  – відповідно струм у рухомій та нерухомій котушках;  $\frac{dM_{p.n.}}{d\alpha}$  – похідна моменту взаємодії за кутом відхилення рухомої частини вимірювального механізму.

### **Завдання**

Реалізувати імітаційну модель динамічного режиму роботи аналогового електромеханічного приладу у вигляді віртуального лабораторного стенду LabView. Приклад розробки наведений на рис. 2.2. та 2.3.

### **Звіт повинен містити**

1. Використані при виконанні лабораторної роботи аналітичні залежності з їх описом.
2. Роздруківку зовнішнього вигляду лицьової панелі та розробленої блок-діаграми (з усіма піддіаграмами) віртуального приладу LabView.

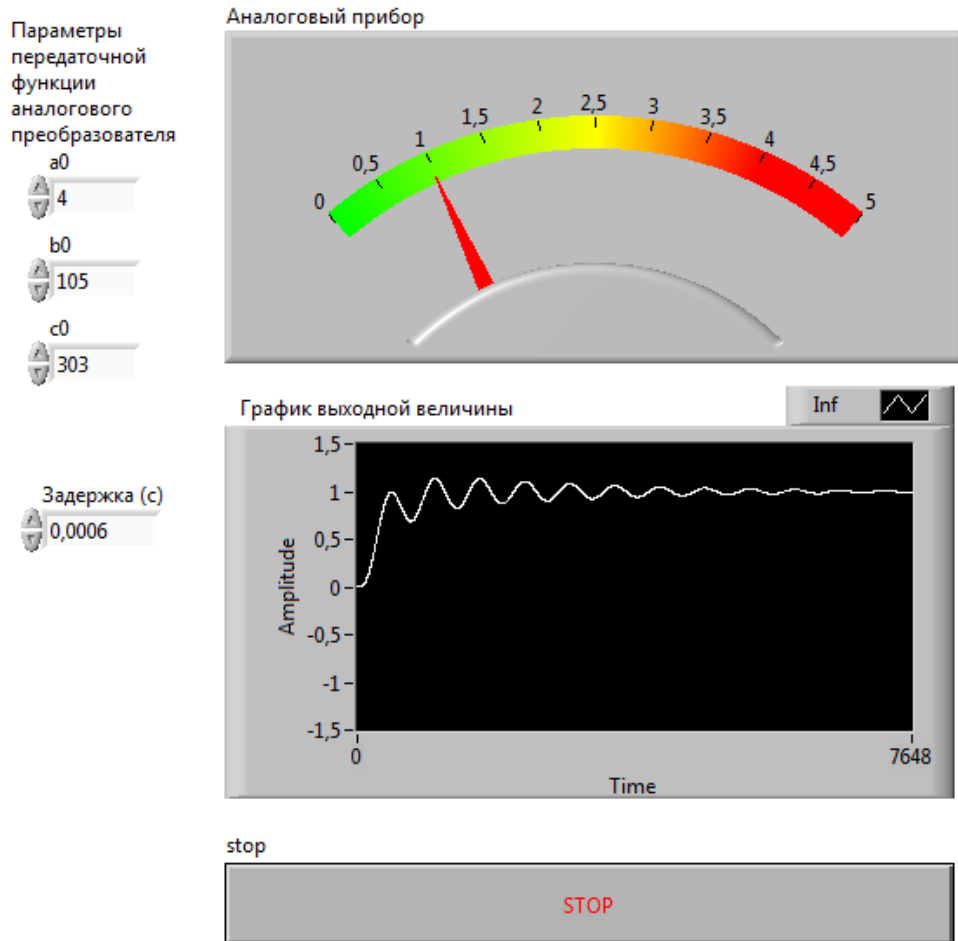


Рис. 2.2. Лицо панель віртуального стенду для моделювання динамічного режиму аналогового електромеханічного приладу

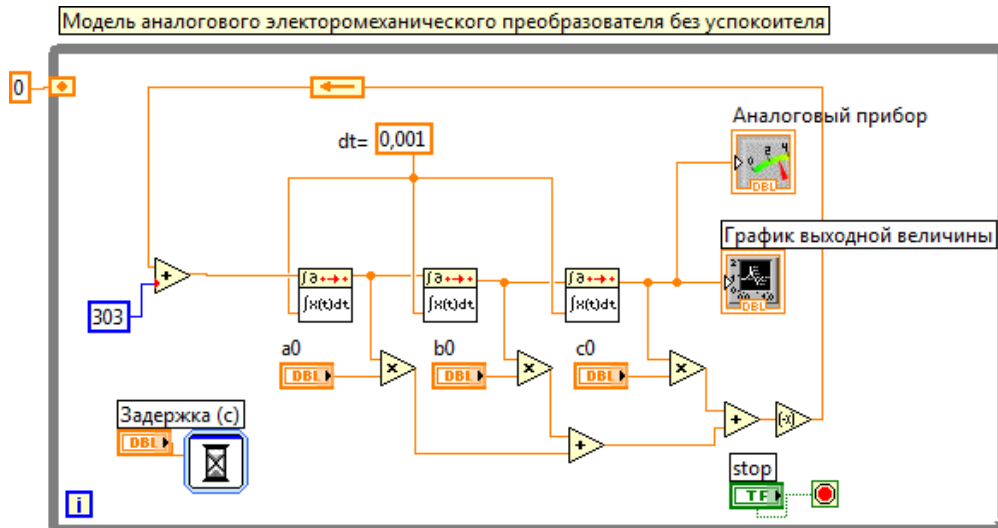


Рис. 2.3. Блок-діаграма віртуального стенду для моделювання динамічного режиму аналогового електромеханічного приладу



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3-LV

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ З ОДНИМ НАКОПИЧУВАЧЕМ ЕНЕРГІЇ ОПЕРАТОРНИМ МЕТОДОМ

**Мета:** виконати аналітичний розрахунок перехідного процесу операторним методом та розробити відповідний віртуальний лабораторний стенд для дослідження електричного кола.

#### Програма роботи

1. Виконати аналітичний розрахунок перехідного процесу в електричному колі з одним накопичувачем енергії операторним методом.
2. Скласти операторну схему заміщення.
3. Побудувати графічну залежність зміни напруг та струмів у часі.
4. Розробити віртуальний лабораторний стенд для моделювання перехідного процесу в електричному колі, яке використовує отриману у п.1 передавальну функцію об'єкту дослідження.

#### Методичні вказівки

##### Операторний метод розрахунку перехідних процесів

Сутність операторного методу полягає в тому, що функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$ , яку називають **оригіналом**, ставиться у відповідність функція  $F(p)$  комплексної змінної  $p = s + j\omega$ , яку називають **зображенням**. У результаті цього похідні та інтеграли від оригіналів замінюються алгебраїчними функціями від відповідних зображень (диференціювання замінюється множенням на оператор  $p$ , а інтегрування – діленням на нього), що в свою чергу визначає перехід від системи інтегро-диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь щодо зображень шуканих змінних. При вирішенні цих рівнянь знаходяться зображення і далі шляхом зворотного переходу – оригінали. Найважливішим моментом при цьому в практичному плані є необхідність визначення тільки незалежних початкових умов, що істотно полегшує розрахунок перехідних процесів в ланцюгах високого порядку в порівнянні з класичним методом.

Зображення  $F(p)$  заданої функції  $f(t)$  визначається відповідно до **прямого перетворення Лапласа**:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (3.1)$$

У скороченому записі відповідність між зображенням і оригіналом позначається, як:

$$F(p) = f(t) \text{ або } F(p) = L\{f(t)\}.$$

Слід зазначити, що якщо оригінал збільшується із зростанням  $t$ , то для збіжності інтеграла (3.1) необхідно більш швидке спадання модуля. Функції, з якими зустрічаються на практиці при розрахунку перехідних процесів, цій умові задовольняють.

В якості прикладу в табл. 3.1 наведено зображення деяких характерних функцій, найпоширеніших при аналізі нестационарних режимів.

Таблиця 3.1

Зображення типових функцій

Оригінал $f(t)$	$A$	$e^{\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$sh \omega t$	$ch \omega t$
Зображення $F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

### Деякі властивості зображень

Зображення суми функцій дорівнює сумі зображень доданків:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \stackrel{\cdot}{=} \sum_{k=1}^n F_k(p).$$

При множенні оригіналу на коефіцієнт на той же коефіцієнт множиться зображення:

$$Af(t) \stackrel{\cdot}{=} AF(p).$$

З використанням цих властивостей і даних табл. 3.1, можна показати, наприклад, що

$$U_0(1 - e^{-\alpha t}) \stackrel{\cdot}{=} \frac{U_0}{p} \left( \frac{1}{p} - \frac{U_0}{p - (-\alpha)} \right) = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + \alpha}.$$

## Зображення похідної та інтеграла

У курсі математики доводиться, що якщо  $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ , то  $df/dt \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0)$ ,

де  $f(0)$  - початкове значення функції  $f(t)$ .

Таким чином, для напруги на індуктивному елементі можна записати:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\cdot}{=} LpI(p) - Li(0),$$

або при нульових початкових умовах  $u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\cdot}{=} LpI(p)$ .

Звідси **операторний опір котушки індуктивності**  $Z(p) = Lp$ .

Аналогічно для інтеграла: якщо  $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ , то  $\int_0^t f(t)dt \stackrel{\cdot}{=} \frac{F(p)}{p}$ .

З урахуванням ненульових початкових умов для напруги на конденсаторі можна записати:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0).$$

Тоді  $u_C(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}$ ,

або при нульових початкових умовах:  $u_C(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{Cp} I(p)$ ,

звідки **операторний опір конденсатора**:  $Z(p) = \frac{1}{Cp}$ .

## Закон Ома в операторній формі

Нехай маємо деяку гілку  $m-n$  (див. рис. 3.1), виділену з деякого складного електричного кола. Складемо закон Ома для цієї гілки в операторній формі.

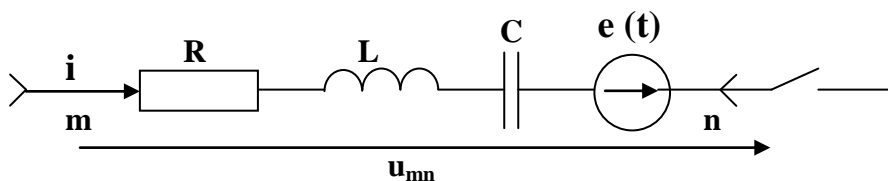


Рис. 3.1. Гілка m-n

Замикання ключа у зовнішньому колі призводить до перехідного процесу, при цьому початкові умови для струму в гілці і напрузі на конденсаторі в загальному випадку ненульові.

Для миттєвих значень змінних можна записати:

$$u_{mn}(t) = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) - e(t).$$

Тоді на підставі наведених вище співвідношень для операторних зображень отримаємо:

$$U_{mn}(p) = I(p) \left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p).$$

Звідки виразимо  $I(p)$ :

$$I(p) = \frac{U_{mn}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}, \quad (3.2)$$

де  $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$  – операторний опір розглянутої ділянки ланцюга.

Слід звернути увагу, що операторний опір  $Z(p)$  відповідає комплексному опору  $\underline{Z}(j\omega)$  гілки в ланцюзі синусоїдального струму при заміні оператора  $p$  на  $j\omega$ .

Рівняння (3.2) є математичним записом закону Ома для ділянки кола з джерелом ЕРС в операторній формі. Відповідно до нього для гілки на рис. 3.1 можна скласти **операторну схему заміщення**, представлену на рис. 3.2.

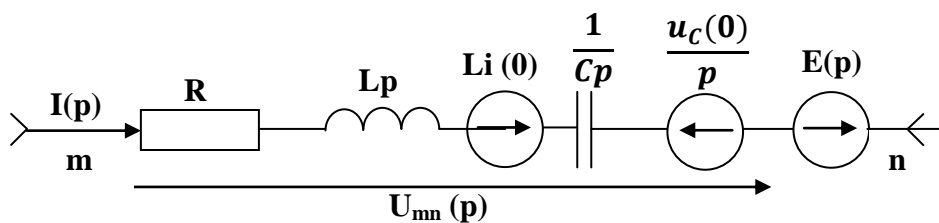


Рис. 3.2. Операторна схема заміщення для m-гілки

### Закони Кірхгофа в операторній формі

**Перший закон Кірхгофа:** алгебраїчна сума зображень струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0.$$

**Другий закон Кірхгофа:** алгебраїчна сума зображень ЕРС, що діють в контурі, дорівнює алгебраїчній сумі зображень напруг на пасивних елементах цього контуру:

$$\sum_{k=1}^m E_k(p) = \sum_{k=1}^m U_k(p).$$

При записі рівнянь за другим законом Кірхгофа слід пам'ятати про необхідність врахування ненульових початкових умов (якщо вони мають місце). З їх урахуванням останнє співвідношення може бути переписано в розгорнутому вигляді:

$$\sum_{k=1}^m (E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p}) = \sum_{k=1}^m (R + Lp + \frac{1}{Cp}) I_k(p).$$

Як приклад, запишемо вираз для зображень струмів в ланцюзі на рис. 3.3 для двох випадків: нульових та ненульових початкових умов:

- 1)  $u_C(0) = 0;$
- 2)  $u_C(0) \neq 0.$

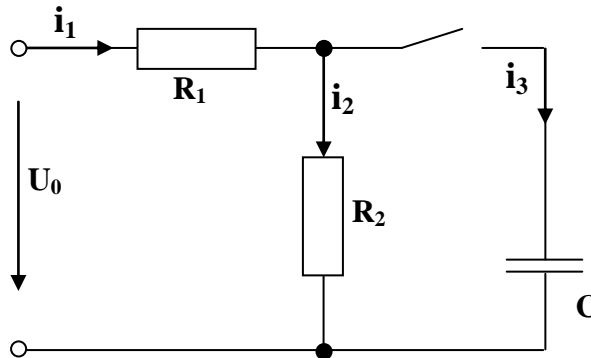


Рис. 3.3. Електричне коло з двома резисторами та конденсатором

У першому випадку відповідно до закону Ома (спираючись на рівняння (3.2)):

$$I_1(p) = \frac{U_0(p)}{R_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{Cp}}} = \frac{U_0(1 + R_2 Cp)}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}.$$

Тоді

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{1}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)} \quad \text{та} \quad I_3(p) = I_1(p) \frac{R_2 Cp}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0 R_2 C}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

У другому випадку, тобто при  $u_c(0) \neq 0$ , для ланцюга на рис. 3.3 слід скласти операторну схему заміщення, яка наведена на рис. 3.4.

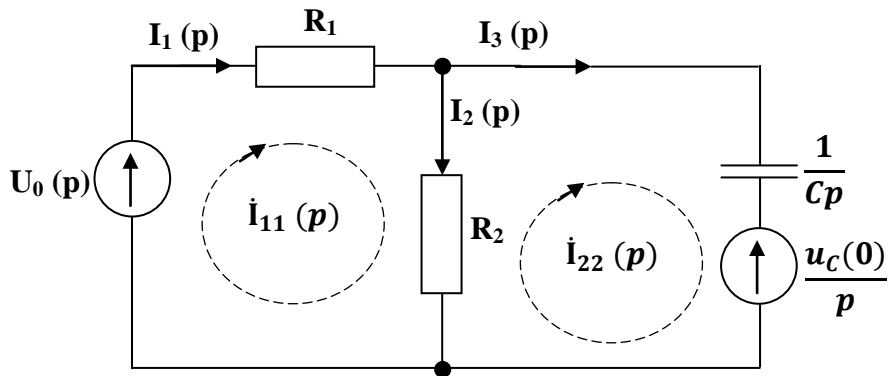


Рис. 3.4. Операторна схема заміщення для кола з двома резисторами та конденсатором

Зображення струмів в ній можуть бути визначені будь-яким методом розрахунку лінійних ланцюгів, наприклад, методом контурних струмів:

$$I_{11}(p)(R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 = \frac{U_0}{p};$$

$$-I_{11}(p)R_2 + I_{22}(p)(R_2 + \frac{1}{Cp}) = -\frac{u_c(0)}{p},$$

Звідки  $I_1(p) = I_{11}(p)$ ;  $I_2(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p)$  та  $I_3(p) = I_{22}(p)$ .

### Перехід від зображень до оригіналів

Перехід від зображення шуканої величини до оригіналу може бути здійснений такими способами:

#### 1. За допомогою зворотного перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp,$$

яке являє собою рішення інтегрального рівняння (3.1) і скорочено записується, як:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

На практиці цей спосіб застосовується рідко.

## 2. За таблицями відповідності між оригіналами і зображеннями

У спеціальній літературі є досить велика кількість формул відповідності, що охоплюють практично всі завдання електротехніки. Згідно даному способу необхідно отримати зображення шуканої величини у вигляді, відповідному табличному, після чого виписати з таблиці вираз оригіналу.

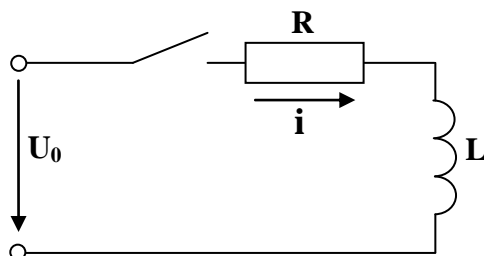


Рис. 3.5. Електричне коло з резистором та котушкою індуктивності

Наприклад, для електричного кола на рис. 3.5 можна знайти оригінал струму, отримавши зображення струму зведене до табличного вигляду:

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{Z(p)} = \frac{U_0}{p(R + pL)} = \frac{U_0}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right).$$

Тоді відповідно до даних табл. 3.1 знаходимо оригінал струму:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$
 що відповідає результату, отриманому для даного кола

(рис. 1.3) у лабораторній роботі №1, класичним методом розрахунку.

## 3. З використанням формули розкладу

Нехай зображення  $F(p)$  шуканої змінної визначається відношенням двох поліномів:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \text{ де } m < n.$$

Цей вираз може бути представлений у вигляді суми простих дробів:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (3.3)$$

де  $p_k$  –  $k$ -й корінь рівняння  $F_2(p) = 0$ .

Для визначення коефіцієнтів  $A_k$  помножимо ліву і праву частини співвідношення (3.3) на  $(p - p_k)$ :

$$(p - p_k) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{A}{p - p_i} + A_k = \frac{F_1(p)(p - p_k)}{F_2(p)}.$$

При  $p \rightarrow p_k$  отримаємо  $A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{F_2(p)}$

Розглядаючи отриману невизначеність за правилом Лопітала, запишемо:

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\frac{d}{dp}(p - p_k)}{F_2'(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Таким чином,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}$$

Оскільки співвідношення  $\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}$  постійний коефіцієнт, то враховуючи,

що  $e^{\alpha t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p - \alpha}$ , остаточно отримуємо:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad (3.4)$$

Співвідношення (3.4) являє собою формулу розкладання. Якщо один з коренів рівняння  $F_2(p) = 0$  дорівнює нулю, тобто  $F_2(p) = pF_3(p)$ , то рівняння (3.4) зводиться до вигляду:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}.$$

На закінчення розділу відзначимо, що для знаходження початкового  $f(0)$  і кінцевого  $f(\infty)$  значень оригіналу можна використовувати **граничні співвідношення**:

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p);$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p),$$



які також можуть служити для оцінки правильності отриманого зображення.

Приклад. Для заданого операторного зображення струму  $I(p)$  у ланцюзі електричного кола знайти оригінал цього струму  $i(t)$ .

$$I(p) = \frac{0.5p + 50}{p \cdot (0.4p + 200)}$$

Розв'язок. Скористаємося формулою розкладання.

Для даного зображення  $I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$  маємо:

$$F_1(p) = 0.5p + 50; \quad F_2(p) = p \cdot (0.4p + 200).$$

Знаходимо корені рівняння:

$$F_2(p) = p \cdot (0.4p + 200) = 0,$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -500 \text{ c}^{-1}.$$

Знаходимо похідну:

$$F_2'(p) = 0.8p + 200.$$

Визначаємо необхідні значення  $F_1(p)$  та  $F_2'(p)$  при знайдених коренях:

$$F_1(p_1) = F_1(0) = 0.5 \cdot 0 + 50 = 50,$$

$$F_1(p_2) = F_1(-500) = 0.5 \cdot (-500) + 50 = -200,$$

$$F_2'(p_1) = F_2'(0) = 0.8 \cdot 0 + 200 = 200,$$

$$F_2'(p_2) = F_2'(-500) = 0.8 \cdot (-500) + 200 = -200.$$

Підставивши вище знайдені значення у формулу розкладення (3.4), отримаємо оригінал струму:

$$i(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} = \frac{50}{200} \cdot e^0 + \frac{-200}{-200} \cdot e^{-500t} = 0.25 + e^{-500t}.$$

При реалізації операторного методу використовуються такі інтегральні перетворення:

а) Перетворення Фур'є:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

На  $f(t)$  накладаються певні обмеження. У першу чергу, повинен існувати зворотний інтеграл:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

б) Перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad p = \sigma - j\omega,$$

$f(t)$  не повинна бути абсолютно інтегрованою.

Зворотне перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp.$$

Приклад. Для заданої функції  $f(t)$  виконати перетворення Лапласа.

$$f(t) = A = const$$

Підставивши дану функцію у формулу перетворення Лапласа, отримаємо:

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = \frac{A}{-p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{-p} \left( \frac{1}{e^{\infty}} - 1 \right) = \frac{A}{p}.$$

в) Перетворення Карсона-Хевісайда:

$$F(p) = p \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

$f(t)$  – оригінал по відношенню до функції  $F(p)$ .

$F(p)$  – зображення для функції  $f(t)$ .

$F(p) = \alpha[f(t)]$  – зображення по Лапласу ( $\alpha$  – перетворення по Лапласу).

Починаючи з цього моменту і далі значок « $\Rightarrow$ » еквівалентний значку відповідності  $F(p) \Rightarrow f(t)$ .

## Властивості перетворення Лапласа.

### 1) Лінійність.

Якщо функція  $f(t) = \sum_k a_k f_k(t)$  (є лінійною комбінацією функцій) і якщо для кожної функції  $f_k(t)$  існує перетворення Лапласа  $F_k(p) \Rightarrow f_k(t)$ , тоді

$$F(p) = \sum_k a_k F_k(p).$$

### 2) Перетворення Лапласа від похідної.

$$\text{Якщо } f(t) \Rightarrow F(p), \text{ то } L\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p) - f(0),$$

де  $L$  - перетворення Лапласа.

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

### 3) Перетворення Лапласа від інтеграла.

Якщо  $f(t) \Rightarrow F(p)$ , то перетворення Лапласа:

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p},$$

де  $L$  - перетворення Лапласа.

Таблиця 3.2

Перетворення Лапласа

$f(t)$	$A$	$e^{\alpha t}$	$t \cdot e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t$	$e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$
$F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$

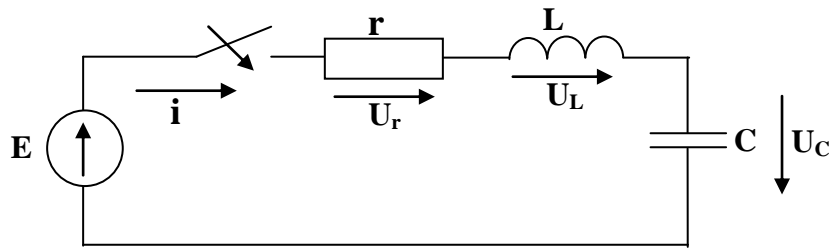
Перші два перетворення в таблиці використовуються в ланцюгах 1-го порядку, останні 3 перетворення - в ланцюгах 2-го порядку.

### Зауваження:

$$L[1(t)] = \frac{1}{p},$$

$$L[\delta(t)] = 1 \text{ (} L \text{- перетворення Лапласа)}.$$

Приклад. В результаті комутації рубильник замикається. Визначити струм у колі до і після комутації. Побудувати графік зміни струму у часі. Розрахунок виконати класичним та операторним методами.  $i_L(0) = i(0) = 0$ ,  $u_C(0) = 0$ .



Розв'язок.

*Класичний метод.*

Незалежні початкові умови  $i(0_+)$  та  $u_C(0_+)$  визначаємо за першим законом комутації з аналізу до комутаційного режиму роботи кола (рубильник розімкнутий, коло відключене від джерела живлення, конденсатор у загальному випадку заряджений до напруги  $u_C(0_-)$ ). Враховуюче це, маємо:

$$i(0_+) = i(0_-) = 0 ; u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 .$$

Для визначення струму у контурі після комутації складемо рівняння за другим законом Кірхгофа:  $u_r + u_L + u_C = E$ .

Перепишемо його враховуючи, що:  $u_r = r \cdot i$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$ ,  $u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$

$$L \frac{di}{dt} + r \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \tag{1}$$

Продиференціювавши рівняння (1) за часом отримаємо лінійне диференційне

рівняння другого порядку відносно  $i$ :  $L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{dE}{dt}$ , поділивши праву та ліву частину рівняння на  $L$ , отримаємо:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{dE}{dt} \tag{2}$$

Згідно класичного методу розрахунку перехідних процесів рішення диференційного рівняння (2) дорівнює сумі примушеної та вільної складових:

$$i(t) = i_{np} + i_g(t) ,$$

де  $i_{np}$  – примусова складова струму, яка дорівнює значенню струму у усталеному після комутаційному режимі;  $i_e$  – вільна складова струму, яка визначається рішенням диференційного рівняння (2).

У усталеному після комутаційному режимі ( $t = \infty$ ) маємо коло постійного струму (опір індуктивного елементу  $L$  дорівнює нулю, а ємності  $\infty$ ) з розривом на місці  $C$ . Струм у цьому режимі дорівнює нулю, а напруга на ємності дорівнює напрузі джерела живлення. Тоді примусова складова струму:

$$i_{np} = 0.$$

Вільну складову визначаємо рішенням диференційного рівняння:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = 0.$$

Отримаємо характеристичне рівняння:

$$p^2 + \frac{r}{L} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0, \text{ розв'язавши яке знаходимо корені:}$$

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Розглянемо випадок коли характеристичне рівняння має дійсні і відмінні один від одного корені, тобто  $p_1 \neq p_2 < 0$ , тоді  $p_1 = -\alpha_1, (c^{-1})$ ;  $p_2 = -\alpha_2, (c^{-1})$ .

У цьому випадку вільна складова струму у загальному виді:

$$i_e(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2 t}. \quad (3)$$

Для знаходження вільної складової необхідно визначити постійні інтегрування  $A_1$  та  $A_2$ . Відповідно, необхідно отримати ще одне рівняння, яке зв'язує шукані величини. Для цього продиференціюємо рівняння (3) за часом:

$$\frac{di}{dt} = -\alpha_1 k_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} + (-\alpha_2) \cdot k_2 \cdot e^{-\alpha_2 t}.$$

Знайдемо  $\frac{di}{dt}(0)$ , підставивши у рівняння (1)  $t=0$ , і враховуючи, що  $i(0)=0$  та  $u_c(0)=0$ :

$$\cancel{i(0) \cdot r} + L \frac{di}{dt}(0) + \cancel{u_e(0)} = E \Rightarrow \frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$$

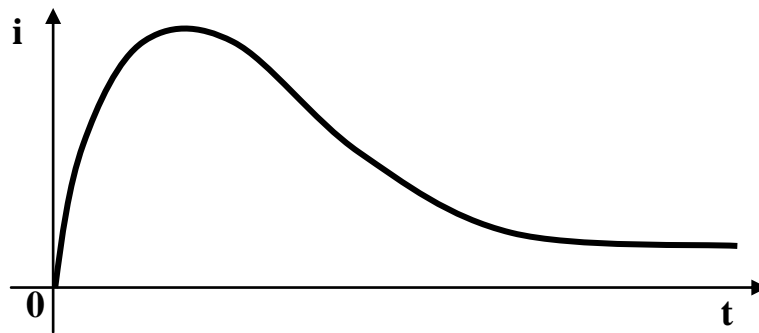
Для знаходження коефіцієнтів  $A_1$  та  $A_2$  запишемо для моменту часу  $t = 0_+$  два рівняння:

$$\begin{cases} i(0) = A_1 + A_2 = 0; \\ \frac{di}{dt}(0) = -\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 = \frac{E}{L} \Rightarrow A_1 = \frac{E}{L(\alpha_2 - \alpha_1)}, A_2 = -\frac{E}{L(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{cases}$$

Підставивши  $A_1$  та  $A_2$  запишемо рівняння для повного струму у колі:

$$i(t) = i_{np} + i_g(t) = 0 + \frac{E}{L(\alpha_2 - \alpha_1)} [e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}] = \frac{E}{L(\alpha_2 - \alpha_1)} [e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}] A.$$

Крива струму аперіодичного процесу при нульових початкових умовах:



*Операторний метод.*

Для визначення операторного зображення струму застосуємо перетворення Лапласа для правої та лівої частини рівняння (1).

$$I(p) \Rightarrow i(t)$$

$$(1) \rightarrow L \cdot pI(p) - \cancel{L \cdot i(0)} + r \cdot I(p) + \frac{I(p)}{pC} = \frac{E}{p},$$

$$I(p) \cdot \left[ r + pL + \frac{1}{pC} \right] = \frac{E}{p},$$

вираз в дужках - повний опір ланцюга, якщо  $p = j\omega$ .

$$I(p) = \frac{E}{Lp^2 + rp + \frac{1}{C}} = \frac{E/L}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

Для знаходження коренів  $p_{1,2}$  знаменник вищенаведеного рівняння прирівнюємо до нуля. Оскільки знаменник функції  $I(p)$  збігається з характеристичним рівнянням з класичного методу розрахунку, то корені дорівнюватимуть:

$$p_1 = -\alpha_1, \quad p_2 = -\alpha_2,$$

$$I(p) = \frac{E}{L} \frac{1}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}$$

Оригінал струму будемо шукати використовуючи таблицю відповідності (табл. 3.2). Перетворимо зображення струму  $I(p)$  таким чином, щоб воно набуло табличного виразу. Представимо  $I(p)$  у вигляді суми двох функцій, які після перетворення набудуть виду табличних формул:

$$\frac{1}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)} = \frac{A}{p + \alpha_1} + \frac{B}{p + \alpha_2} = \frac{Ap + A\alpha_2 + Bp + B\alpha_1}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}$$

Для знаходження коефіцієнтів  $A$ ,  $B$  використаємо метод невизначених коефіцієнтів. Оскільки знаменники лівої та правої частини у вищенаведеному рівнянні рівні, то значить рівні й їх чисельники. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях змінної  $p$  у лівій та правій частинах цієї рівності, отримуємо систему двох рівнянь для визначення двох невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\alpha_2 + B\alpha_1 = 1 \end{cases}, \quad A = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad B = -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Підставивши знайдені значення  $A$ ,  $B$  і скориставшись таблицею перетворень можемо записати оригінал струму:

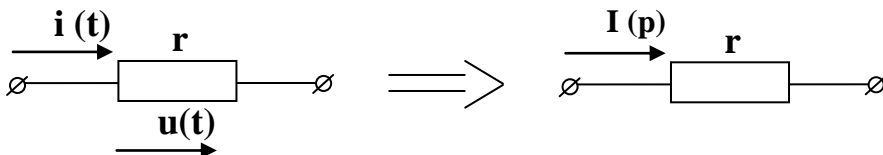
$$I(p) = \frac{E}{L(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \left[ \frac{1}{p + \alpha_1} - \frac{1}{p + \alpha_2} \right] \Rightarrow i(t) = \frac{E}{L(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[ e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t} \right]$$

Розв'язки класичного та операторного методу розрахунку збіглися.

## Розрахунок перехідних процесів за допомогою операторної схеми заміщення

Для складання операторної схеми заміщення ланцюга необхідно елементи заданої схеми замінити на елементи операторної схеми заміщення. Нижче наведені відповідні схеми заміщення елементів електричного кола та компонентні рівняння елементів кола в операторній формі.

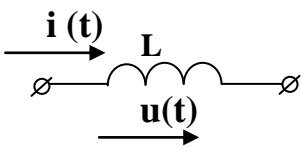
### 1. Резистивний елемент.



$$u(t) = r \cdot i(t), \quad u(t) \Rightarrow U(p), \quad i(t) \Rightarrow I(p).$$

$$U(p) = r \cdot I(p) - \text{закон Ома.}$$

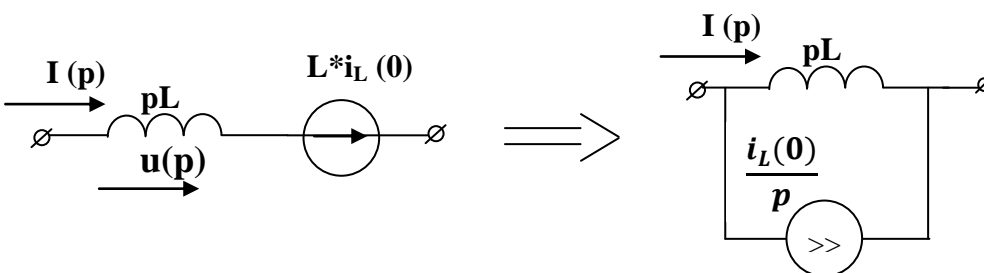
### 2. Індуктивний елемент



$$i(t) \Rightarrow I(p)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_L(t) \Rightarrow U_L(p)$$

$$U(p) = pL \cdot I(p) - L \cdot i_L(0) - \text{закон Ома.}$$



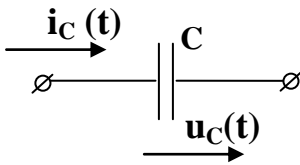
$$Z_L(p) = pL \rightarrow Y_L(p) = \frac{1}{pL},$$

$Z(p)$  – операторний вхідний опір.

$Y(p)$  – операторна вхідна провідність (величина зворотна  $Z(p)$ ).



### 3. Ємнісний елемент.

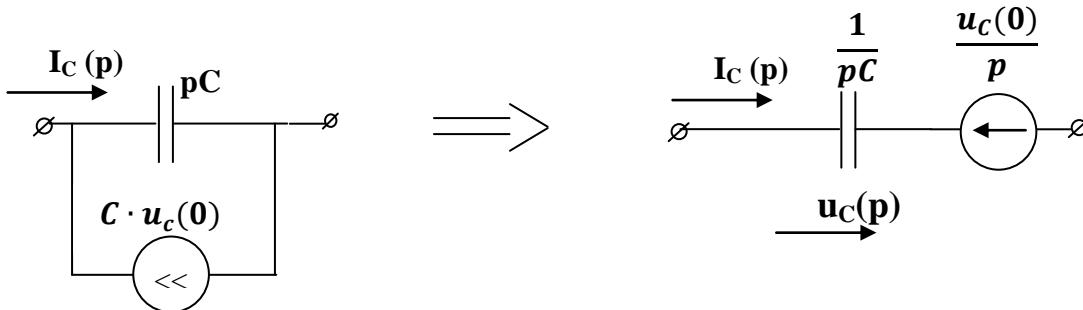


$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

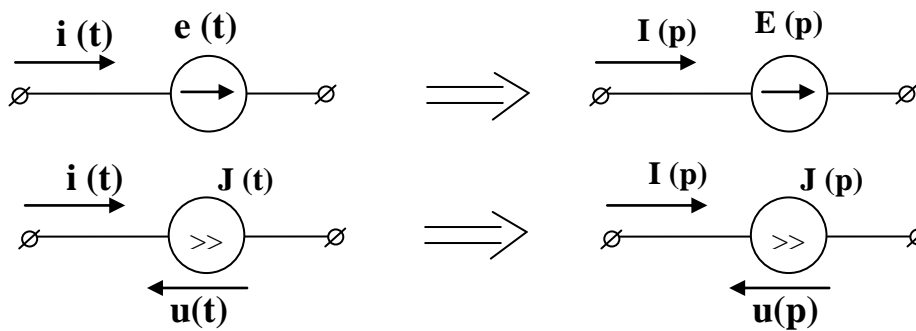
$$i_C(t) \Rightarrow I_C(t), \quad u_C(t) \Rightarrow U_C(t)$$

$$I_C(p) = pC \cdot U_C(p) - Cu_C(0) \text{ - закон Ома.}$$

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC}, \quad Y_C(p) = pC$$



### 4. Джерело ЕРС та струму.



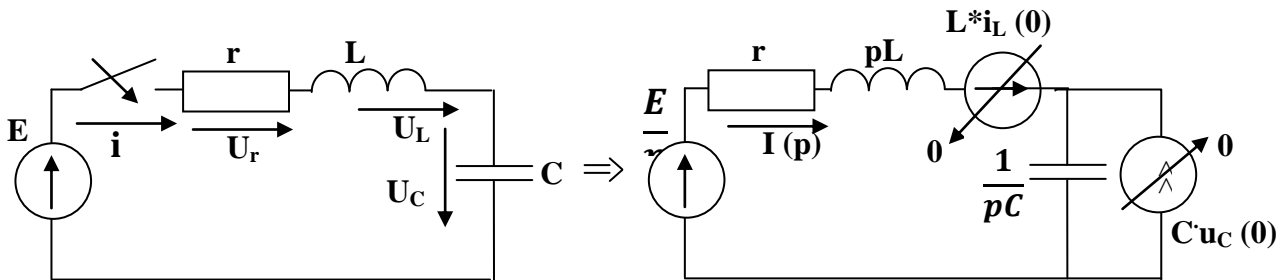
Для проведення розрахунків в операторній схемі необхідно всі рівняння (топологічні, компонентні, вузлові і т.д.) записати в операторній формі.

$$\sum_k i_k(t) = 0 \quad \sum_k u_k(t) = 0$$

$$\sum_k I_k(p) = 0 \quad \sum_k U_k(p) = 0$$

$$A \cdot I(p) = 0 \quad B \cdot U(p) = 0$$

Користуючись наведеними відповідностями та рівняннями можна скласти операторну схему заміщення та записати закон Ома у операторній формі для вищенаведеного прикладу:



$$I(p) = \frac{E/p}{r + pL + \frac{1}{pC}}$$

### Розв'язання рівнянь стану в операторній формі.

Під станом розуміється найменша кількість змінних, які потрібно визначити у даний момент часу, щоб судити про поведінку системи у майбутньому.

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A_1 \cdot X(t) + B_1 \cdot V(t); & (1) \\ Y(t) = A_2 \cdot X(t) + B_2 \cdot V(t). & (2) \end{cases}$$

Диференціальне рівняння (1) називається рівнянням стану об'єкта, рівнянням (2) визначає вихідні змінні в залежності від  $X(t)$ , тому його називають вихідним рівнянням системи.

$$X(t) = \begin{pmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} \text{ — вектор змінних стану.}$$

Операторне зображення:  $X(t) \Rightarrow X(p)$ ,  $V(t) \Rightarrow V(p)$ ,  $Y(t) \Rightarrow Y(p)$ .

Рішення шукаємо у вигляді:

$$p \cdot X(p) - X(0) = A_1 \cdot X(p) + B_1 \cdot V(p)$$

$$(p \cdot 1 - A_1) \cdot X(p) = X(0) + B_1 \cdot V(p)$$

$$X(p) = (p \cdot 1 - A_1)^{-1} \cdot X(0) + (p \cdot 1 - A_1)^{-1} \cdot B_1 \cdot V(p)$$

$X(p) \Rightarrow X(t)$  Зворотнє перетворення потрібно обчислювати для кожного з елементів  $X(p)$ .

$$Y(p) = A_2 \cdot X(p) + B_2 \cdot V(p)$$

$$Y(p) = A_2(p \cdot 1 - A_1)^{-1} \cdot X(0) + [A_2(p \cdot 1 - A_1)^{-1} \cdot B_1 + B_2] \cdot V(p).$$

Розглянемо  $v(t) = 0$ ,  $V(p) = 0$  (джерел в ланцюзі немає).

Тоді отримаємо рішення:

$$X(p) = (p \cdot 1 - A_1)^{-1} \cdot X(0) = X_{ce}(p),$$

$$(p \cdot 1 - A_1)^{-1} = \frac{D}{\det(p \cdot 1 - A_1)} \Rightarrow \det(p \cdot 1 - A_1) = 0 - \text{характеристичне рівняння.}$$

### **Зв'язок перехідної й імпульсної характеристик ланцюга з передавальною функцією ланцюга.**

Відношення реакції кола на ступінчатий вплив до величини цього впливу при нульових початкових умовах називають перехідною характеристикою кола:

$$H(j\omega) = \frac{Y_{вих}}{X_{вх}} - \text{комплексна передавальна функція.}$$

Замінивши  $j\omega$  на оператор Лапласа  $p$  отримаємо операторну передавальну функцію:

$$H(p) = \frac{Y_{вих}(p)}{X_{вх}(p)}, \quad (3.5)$$

де  $Y_{вих}(p)$  – зображення відгуку кола;  $X_{вх}(p)$  – зображення впливу кола.

Оскільки впливами є напруги і струми на вході кола, а відгуками - на виході, відповідно можна записати чотири види операторних передавальних функцій:

1. Операторна передавальна функція напруги – відношення зображення відгуку кола  $U_{вих}(p)$  у вигляді напруги до зображення впливу  $U_{вх}(p)$  у вигляді напруги:

$$H_{uu}(p) = \frac{\dot{U}_{вих}(p)}{\dot{U}_{вх}(p)}.$$

2. Операторний опір кола - відношення зображення відгуку кола  $U_{вих}(p)$  у вигляді напруги до зображення впливу  $I_{вх}(p)$  у вигляді струму:

$$H_{ii}(p) = \frac{\dot{U}_{вих}(p)}{\dot{I}_{вх}(p)}$$

3. Операторна передавальна функція струму – відношення зображень струмів на виході і вході кола:

$$H_{ii}(p) = \frac{I_{вих}(p)}{I_{вх}(p)}$$

4. Операторна провідність кола – відношення зображення відгуку кола  $I_{вих}(p)$  у вигляді струму до зображення впливу  $U_{вх}(p)$  у вигляді напруги:

$$H_{ii}(p) = \frac{I_{вих}(p)}{U_{вх}(p)}$$

З (3.5) випливає, що:

$$Y_{вих}(p) = H(p) \cdot X_{вх}(p)$$

Якщо в якості впливу на коло подати одиничну ступінчасту функцію  $1(t)$ , то її зображенням буде  $F(p) = \frac{1}{p}$ . При цьому відгуком кола буде перехідна функція  $h(t)$ , а її зображенням -  $h(p)$ . Тоді маємо:

$1(t) \rightarrow Y_{вих}(t) \rightarrow h(t)$  - перехідна функція,

$$X_{вх}(p) = L[X_{вх}(t)] = \frac{1}{p} \quad (\mathcal{L} - \text{перетворення Лапласа}),$$

$$Y_{вих}(p) = H(p) \cdot X_{вх}(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p) \Rightarrow Y_{вих}(t) = h(t) \quad (3.6)$$

Формула (3.6) виражає зв'язок між перехідною функцією кола  $h(t)$  і операторною передавальною функцією  $H(p)$ , а також дозволяє виявити перехідну функцію  $h(t)$ , якщо відома передавальна функція  $H(p)$ :

$$h(t) \Rightarrow \frac{H(p)}{p}, \quad \frac{H(p)}{p} = L[h(t)] \quad (\mathcal{L} - \text{перетворення Лапласа}).$$

Отримаємо зображення імпульсної характеристики кола  $h_s(t)$ .

Якщо  $h_{\delta}(t) = h'(t)$ , а  $h(t) = \frac{1}{p} \cdot H(p)$ , то

$h'(t) \Rightarrow p \cdot \frac{1}{p} \cdot H(p) = H(p)$  - імпульсна характеристика кола.

Таким чином:

$$h_{\delta}(t) \Rightarrow H(p) \quad (3.7)$$

Вираз (3.7) дозволяє визначити імпульсну функцію кола  $h_{\delta}(t)$  при відомій операторній передавальній функції  $H(p)$ . Для цього достатньо перейти від зображення  $H(p)$  до оригіналу  $h_{\delta}(t)$ .

### Завдання

Для заданого електричного кола розрахувати перехідний процес операторним методом. Побудувати графіки зміни напруг та струмів у часі. Розробити віртуальний лабораторний стенд для моделювання перехідного процесу заданого кола.

Для усіх варіантів передбачити використання у якості джерела живлення ЕРС постійного струму з діапазоном регульованої напруги 0-50 В. При виконанні аналітичних розрахунків прийняти  $E=10$  В. Для контурів з ємністю  $U_c(0) = 0$  В.

### Варіанти індивідуальних завдань обираються з лабораторної роботи №1.

Вихідні дані та схеми електричних кіл з індуктивністю і ємністю обираються з завдання №1 та завдання №2 відповідно.

### Звіт повинен містити

1. Вихідні дані у вигляді схем та числових значень параметрів для електричних кіл з індуктивністю та ємністю відповідно.
2. Детальний опис аналітичного розрахунку перехідних процесів операторним методом у заданих колах, що включає формули у загальному виді та з підстановкою числових даних.
3. Побудовані у масштабі графіки зміни напруг та струмів у часі.
4. Роздруковку зовнішнього вигляду лицьової панелі та розробленої блок-діаграми (з усіма піддіаграмами) віртуального приладу LabView.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4-LV

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ З ДВОМА НАКОПИЧУВАЧАМИ ЕНЕРГІЇ

**Мета:** виконати аналітичний розрахунок перехідного процесу класичним та операторним методами та розробити відповідні віртуальні лабораторні стенди для дослідження електричних кіл.

#### Програма роботи

1. Виконати аналітичний розрахунок перехідного процесу в електричному колі з двома накопичувачами енергії класичним методом.
2. Виконати аналітичний розрахунок перехідного процесу в електричному колі з двома накопичувачами енергії операторним методом.
3. Скласти операторну схему заміщення.
4. Розробити віртуальні лабораторні стенди для моделювання перехідного процесу в електричному ланцюзі.

#### Методичні вказівки

##### Перехідні процеси в електричних колах з двома реактивними елементами

При послідовному з'єднанні опору  $R$ , котушки індуктивності  $L$  і конденсатора  $C$  утворюється електричний R-L-C контур (рис. 4.1).

Диференціальне рівняння для струму в контурі:

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = E.$$

Після диференціюванні по  $t$  і ділення на  $L$  отримаємо:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = 0 \quad (4.1)$$

Рішення рівняння (4.1) дорівнює сумі примушеної і вільної складових:

$$i = i_{np} + i_e.$$

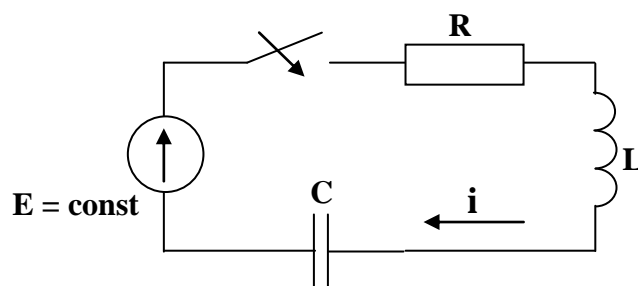


Рис. 4.1. Електричний R-L-C контур

У нашому випадку примушена складова перехідного струму дорівнює нулю, тому що в схемі є ємність, що є розривом ланцюга для постійного струму.

Вільна складова є загальним рішенням рівняння:

$$\frac{d^2 i_g}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di_g}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i_g = 0 \quad (4.2)$$

Нехай  $i_g = A \cdot e^{Pt}$ ,  $\frac{di_g}{dt} = A \cdot P \cdot e^{Pt}$ ,  $\frac{d^2 i_g}{dt^2} = A \cdot P^2 \cdot e^{Pt}$ .

Після підстановки цих виразів у рівняння (4.2) отримаємо характеристичне рівняння:

$$P^2 + \frac{R}{L} \cdot P + \frac{1}{L \cdot C} = 0.$$

Характеристичне рівняння має два кореня:

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{L \cdot C}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

де  $\alpha = \frac{R}{2L}$  - коефіцієнт затухання;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  - кутова резонансна частота контуру без втрат.

Отримаємо:

$$i = i_g = A_1 \cdot e^{P_1 t} + A_2 \cdot e^{P_2 t}.$$

Вид коренів залежить від співвідношення:

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2Q},$$

де  $\rho = \sqrt{L/C}$  - характеристичний або хвильовий опір контуру;  $Q = \rho/R$  - добротність контуру.

### **Коливальний режим**

Найбільш важливий випадок, що найчастіше зустрічається, коли корені  $P_{1,2}$  - комплексні спряжені з негативною дійсною частиною, вільна складова має вигляд затухаючих коливань. У цьому випадку:

$$\alpha < \omega_0, \quad R < 2\rho, \quad Q > \frac{1}{2}, \quad P_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_\epsilon,$$

де  $\omega_\epsilon = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  - кутова частота власних коливань у контурі;  $T_\epsilon = \frac{2\pi}{\omega_\epsilon}$  - період власних коливань.

### Струм в ланцюзі

$$i_\epsilon = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_\epsilon \cdot t + \varphi), \quad (4.3)$$

де  $A$  і  $\varphi$  – постійні інтегрування.

До комутації струм в індуктивності дорівнює нулю, відразу після комутації залишається рівним нулю:

$$i(0) = i_\epsilon(0) = i(0_-) = 0.$$

Щоб визначити дві постійні інтегрування, необхідно мати дві початкові умови і скласти два рівняння.

Напруга на індуктивності:

$$u_L = L \cdot \frac{di_\epsilon}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt} [A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \varphi)] = \quad (4.4)$$

$$= L \cdot A \cdot (-\alpha) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_c t + \varphi) + L \cdot A \cdot \omega_c \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi)$$

де  $u_L(0)$  - напруга на індуктивності в момент комутації, є залежною початковою умовою. Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для моменту комутації, щоб визначити залежну початкову умову  $u_L(0)$ :

$$E = i(0) \cdot R + u_C(0) + u_L(0).$$

До комутації конденсатор був не заряджений, тому:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0, \quad u_L(0) = E.$$

Підставляючи в (4.3) і (4.4)  $t = 0$  і використовуючи незалежні і залежні початкові умови, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A \cdot \sin \varphi = 0; \\ L \cdot A \cdot (-\alpha) \cdot \sin \varphi + L \cdot A \cdot \omega_c \cdot \cos \varphi = E. \end{cases} \quad (4.5)$$

Вирішивши систему (4.5), визначимо:



$$\varphi = 0, A = \frac{E}{L \cdot \omega_c},$$

$$i(t) = \frac{E}{L \cdot \omega_c} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_c \cdot t.$$

На рис. 4.2 наведена крива зміни струму в контурі при підключенні до нього джерела постійної ЕРС.

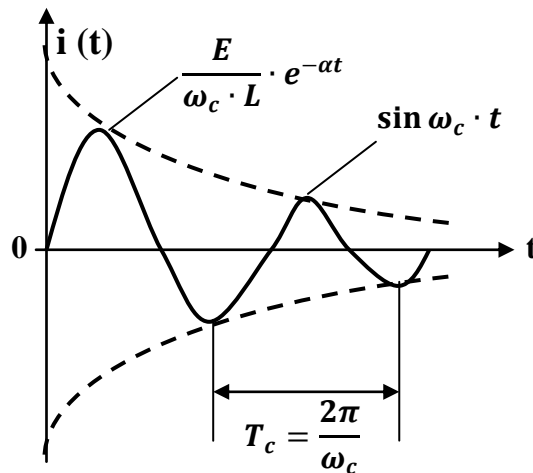


Рис. 4.2. Крива струму у контурі з джерелом постійної ЕРС

З малюнка видно, що коливання в контурі затухають за показовим законом через втрати електричної енергії в опорі  $R$ . Затухання відбувається тим повільніше, чим менше коефіцієнт затухання  $\alpha$ .

$$\text{Постійна часу перехідного процесу} - \tau = -\frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}.$$

При малому коефіцієнті затухання величина  $\omega_0$  незначно відрізняється від резонансної частоти  $\omega_0$ .

Відносне затухання коливань характеризується декрементом затухання, які представляють ставлення миттєвих значень струму через один період:

$$\Delta = \frac{e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_c \cdot t}{e^{-\alpha(t+T_c)} \cdot \sin \omega_c(t+T_c)} = e^{\alpha T_c}.$$

Натуральний логарифм цього оператора носить назву логарифмічного декременту затухання:

$$\ln \Delta = \alpha \cdot T_c.$$

$$\text{Для контуру з невеликим затуханням, коли } \omega_c \approx \omega_0, \ln \Delta \approx \frac{2\pi\alpha}{\omega_0} = \frac{\pi}{Q}.$$

Аперіодичний режим у R-L-C контурі спостерігається при великому затуханні, коли:

$$\alpha > \omega_0, \quad Q < \frac{1}{2}, \quad R > 2\rho.$$

В цьому випадку корені  $P_{1,2}$  дійсні, негативні, різні.

Вільний струм визначається за формулою:

$$i_g = A_1 \cdot e^{P_1 t} + A_2 \cdot e^{P_2 t} \quad (4.6)$$

Напруга на індуктивності:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di_g}{dt} = L \cdot A_1 \cdot P_1 \cdot e^{P_1 t} + L \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot e^{P_2 t} \quad (4.7)$$

Підставивши в рівняння (4.6) і (4.7)  $t = 0$  і використовуючи незалежні і залежні умови, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ A_1 \cdot P_1 + A_2 \cdot P_2 = \frac{E}{L}. \end{cases}$$

Вирішивши цю систему, визначимо постійні інтегрування:

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(P_1 - P_2)}.$$

Вираз для струму в контурі:

$$i = i_g = \frac{E}{L \cdot (P_1 - P_2)} \cdot (e^{P_1 t} - e^{P_2 t}),$$

складається з позитивної, повільно затухаючої експоненти з коефіцієнтом затухання  $P_1$  і негативною, швидко затухаючою експоненти  $P_2$  (рис. 4.3).

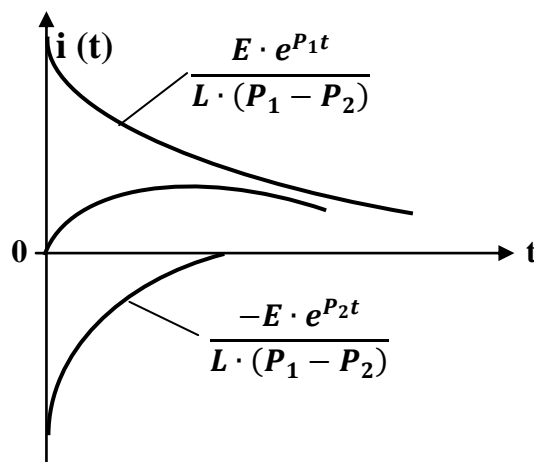


Рис. 4.3. Криві повільно та швидко затухаючих експонент

Струм виходить неколивальним, він не приймає негативних значень, тобто не змінює свого напрямку.

На кордоні між коливальним і аперіодичним режимом при

$$\alpha = \omega_0, \quad Q = \frac{1}{2}, \quad R = 2\rho,$$

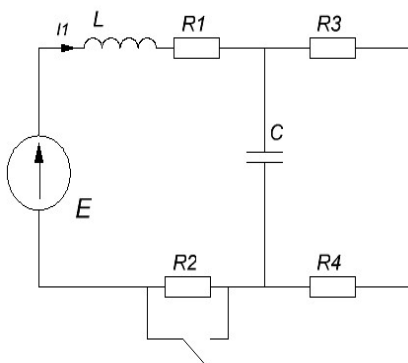
спостерігається граничний випадок аперіодичного процесу.

### Завдання

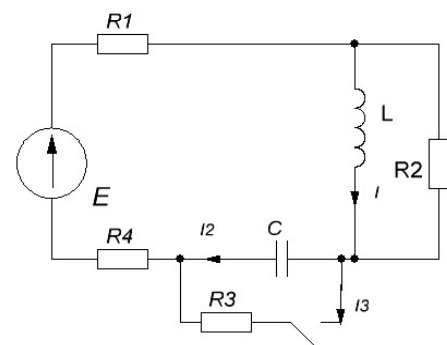
Для заданого електричного кола розрахувати перехідний процес класичним та операторним методами. Побудувати графіки зміни напруг та струмів у часі. Розробити віртуальний лабораторний стенд для моделювання перехідного процесу заданого кола.

Вихідні дані та електрична схема обираються згідно варіанту з таблиці 4.1.

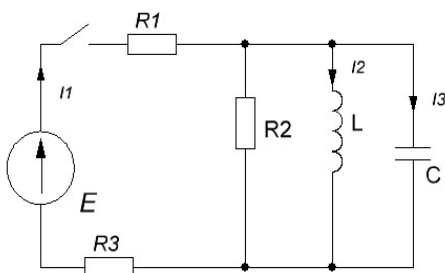
### Варіанти індивідуальних завдань



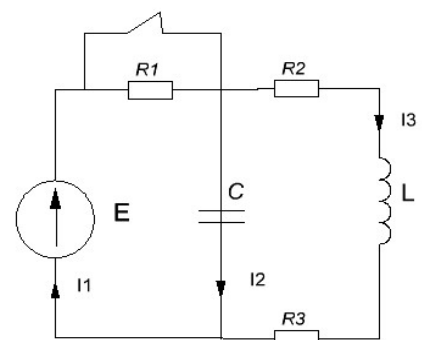
1



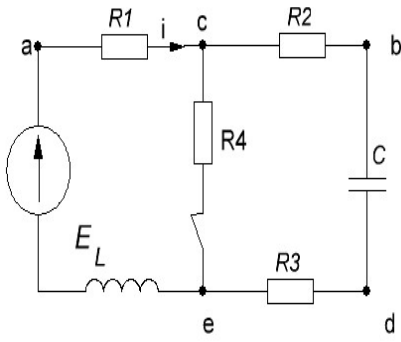
2



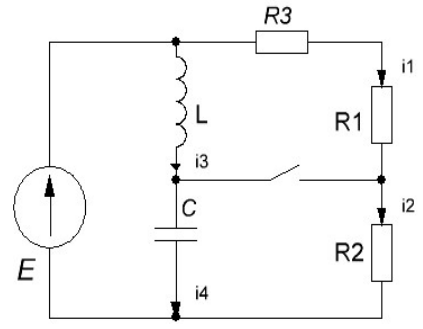
3



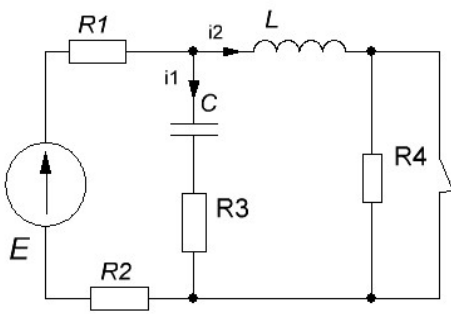
4



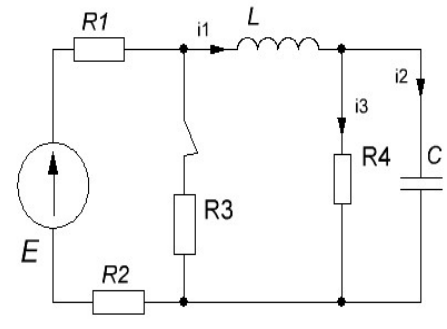
5



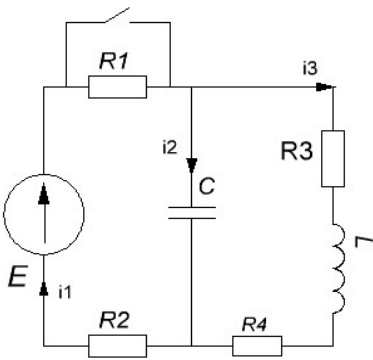
6



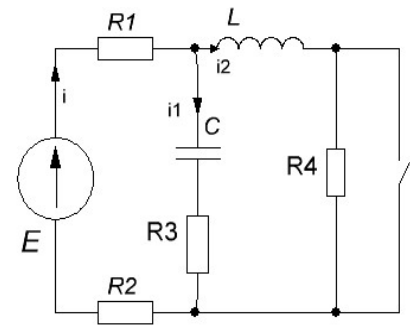
7



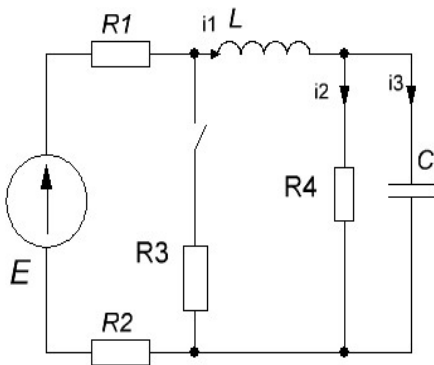
8



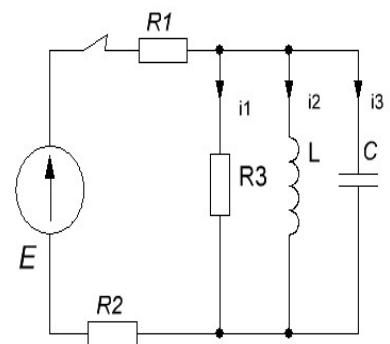
9



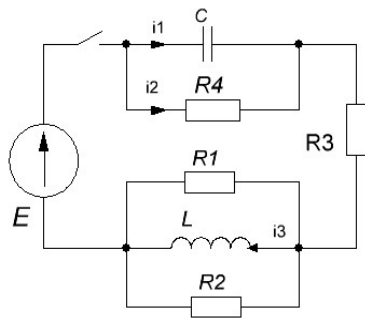
10



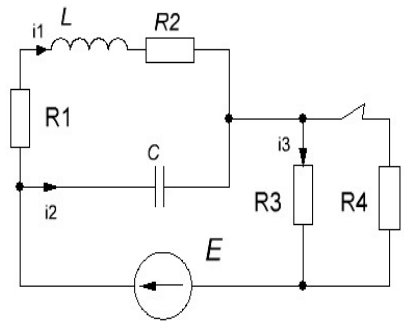
11



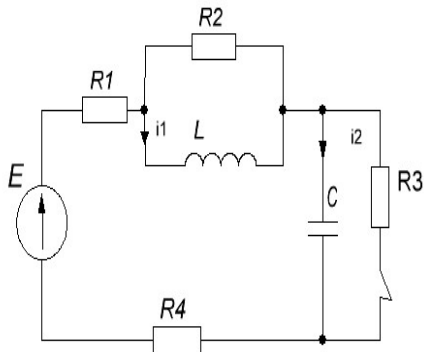
12



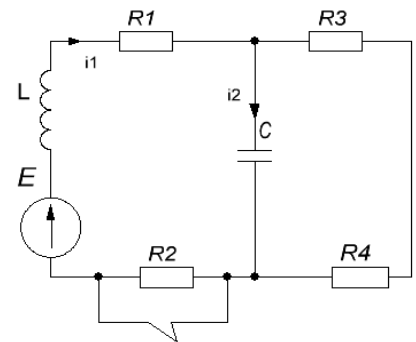
13



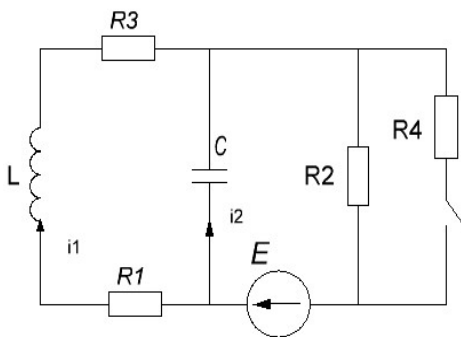
14



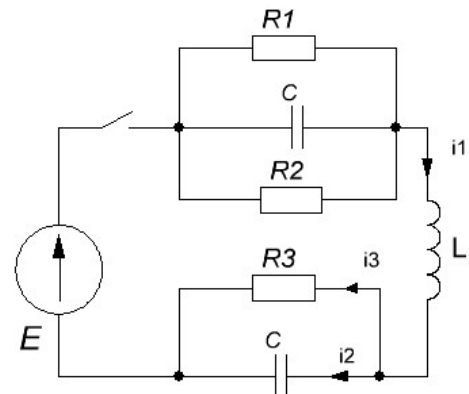
15



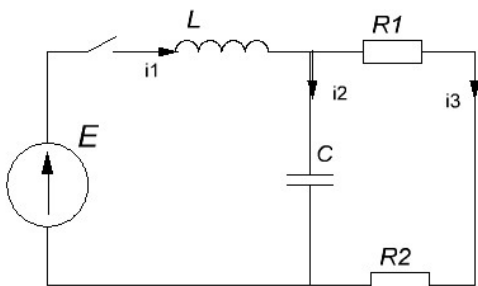
16



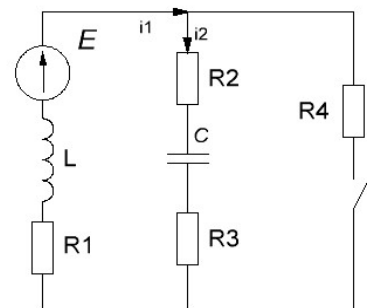
17



18



19



20

Таблиця 4.1. Вихідні дані

Варіант	Електрична схема	E, В	L, мГн	C, мкФ	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	Визначити
					Ом				
1	5	100	1	10	20	15	5	2	i
2	2	150	2	5	8	10	5	2	I <sub>1</sub>
3	19	100	1	10	2	2	-	-	I <sub>1</sub>
4	10	120	1	10	3	0	1	1	I <sub>1</sub>
5	3	100	5	50	2	8	6	-	I <sub>1</sub>
6	1	50	1	1500	2	13	1	4	I <sub>1</sub>
7	11	120	10	10	10	90	1000	1000	I <sub>1</sub>
8	18	200	1	20	4	4	2	-	I <sub>3</sub>
9	4	100	1	10	50	25	25	-	u <sub>C</sub>
10	17	300	5	4	10	20	10	20	u <sub>C</sub>
11	20	100	1	10	20	4	16	2	u <sub>R</sub>
12	15	150	4	5	6	10	5	4	u <sub>C</sub>
13	6	30	1	2,5	10	10	10	-	u <sub>C</sub>
14	7	200	10	10	100	0	50	100	I <sub>1</sub>
15	12	100	1	10	10	10	4	-	I <sub>1</sub>
16	16	50	2	1670	1	2	1	5	I <sub>1</sub>
17	8	120	10	10	10	90	1000	1000	I <sub>1</sub>
18	13	120	1	10	8	8	8	4	I <sub>1</sub>
19	9	200	1	10	10	20	50	20	I <sub>1</sub>
20	14	50	1	100	2	8	10	10	I <sub>1</sub>
21	5	100	1	10	20	20	0	2	u <sub>L</sub>
22	2	150	2	5	5	10	5	5	I <sub>2</sub>
23	19	100	1	10	1	3	-	-	I <sub>3</sub>
24	10	120	1	10	1	2	-	1	I <sub>2</sub>
25	3	100	5	50	3	8	5	-	u <sub>C</sub>
26	1	50	1	1500	2	13	2	3	i
27	11	120	10	10	20	80	1000	1000	I <sub>3</sub>
28	18	200	1	20	6	3	2	-	I <sub>1</sub>
29	4	100	1	10	50	20	30	-	u <sub>L</sub>
30	17	300	5	4	15	20	5	20	I <sub>2</sub>

### Звіт повинен містити

1. Вихідні дані у вигляді схем та числових значень параметрів для кіл з двома накопичувачами енергії.
2. Детальний опис аналітичного розрахунку перехідних процесів операторним методом у заданих колах, що включає формули у загальному виді та з підстановкою числових даних.
3. Побудовані у масштабі графіки зміни напруг та струмів у часі.
4. Роздруковку зовнішнього вигляду лицьової панелі та розробленої блок-діаграми (з усіма піддіаграмами) віртуального приладу LabView.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Электротехника: Учеб.для вузов/А. С. Касаткин, М. В. Немцов.— 7-е изд., стер.— М.: Высш. шк., 2003.— 542 с.: ил. ISBN 5-06-003595-6.
2. Бессонов Л.А. Переходные процессы в линейных электрических цепях // Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник. — 11-е изд., перераб. и доп. — М.: "Гардарики", 2007. — С. 231, 235-236. — 701 с. — 5000 экз. — ISBN 5-8297-0046-8, ББК 31.21, УДК 621.3.013(078.5).
3. Дорожовець М., Стадник Б., Мотало В., Василюк В., Ковальчик А., Борек Р. Основи метрології: Підручник для студентів. Том.1. – Львів: Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2005. – 532 с.
4. Дорожовець М., Стадник Б., Мотало В., Василюк В., Ковальчик А., Борек Р. Основи метрології: Підручник для студентів. Том.2. – Львів: Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2005. – 654 с.
5. Прянишников, В.А. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: практ. пособ. / В.А. Прянишников, Е.А. Петров, Ю.М. Осипов. – СПб.: Корона-принт, 2001.
6. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов: в 3 т. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – М.; СПб.: Питер, 2006.
7. LabVIEW для всех / Джеффри Тревис: Пер. с англ. Клушин Н. А. ~ М.: ДМК Пресс; ПриборКомплект, 2005. ~ 544 с.; ил. ISBN 5-94074-257-2.

Упорядники

**Глухова** Наталія Вікторівна  
**Харламова** Юлія Миколаївна

МЕТРОЛОГІЯ ДИНАМІЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ. ЧАСТИНА II.  
МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ  
ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.  
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

для студентів напряму підготовки  
8(7).05100101 «Метрологія та вимірювальна техніка»

Підписано до видання XX.XX.XXXX.  
Електронний ресурс. Авт. арк. 3,1.

Видано  
у Державному вищому навчальному закладі  
«Національний гірничий університет».  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004  
49600, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.